Analiza i Topologia Lista 7 12 XII 2017

Zad. 1 Niech $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ będzie przestrzenią unitarną. Wyjaśnij, dlaczego jest ona przestrzenią metryczną. Dlaczego próba definicji iloczynu skalarnego na zbiorze (a nie przestrzeni liniowej) nie miałaby sensu?

Zad. 2 Pokaż, że na $C[0,1]$ nie da się określić iloczynu skalarnego zgodnego z normą supremum tzn. takiego $\langle\cdot,\cdot\rangle$, że $||f||_{\text{sup}} = \sqrt{\langle f, f\rangle}$ dla każdego $f \in C[0,1]$. (Wskazówka: użyj równości równoległoboku). Wywnioskuj, że przestrzeń $C[0,1]$ z metryka supremum nie jest przestrzenią unitarną.

Zad. 3 Pokaż, że dla wektorów x, y w przestrzeni unitarnej X następujące warunki są równoważne:

a) $x \perp y$,

b) $||x + \lambda y|| = ||x - \lambda y||$ dla każdego $\lambda \in \mathbb{R}$,

c) $||x + \lambda y|| \geq ||x||$ dla każdego $\lambda \in \mathbb{R}$.

Zad. 4 Zapisz twierdzenie Pitagorasa dla wybranych przez siebie funkcji z $C_2[0,1]$.

Zad. 5 Oblicz $\langle f, g\rangle$ w $C_2[0,1]$, gdzie

a) $f(x) = x$, $g(x) = x^2$,

b) $f(x) = e^x$, $g(x) = x$.

Zad. 6 Posługując się własnościami iloczynu skalarnego w przestrzeni euklidesowej, zdefiniuj *kąt* między wektorami w przestrzeni unitarnej. Następnie oblicz kąt między ciągami $(\frac{1}{2^n})$ i $(\frac{1}{3^n})$ w ℓ_2.

Zad. 7 Zapisz szeregi Fouriera funkcji na $(-\pi, \pi)$

a) $f(x) = |x|$,

b) $f(x) = x^2$.

Zadania mniej obowiązkowe (aczkolwiek nietrudne):

Zad. 8 Odwołując się do przestrzeni euklidesowych, zdefiniuj, co to jest rzut wektora x na prostą $\{a \cdot y \colon a \in \mathbb{R}\}$ rozpinaną przez wektor y w przestrzeni unitarnej. Znajdź rzut funkcji $f(x) = x^2$ na prostą rozpinaną przez $g(x) = \sin x$ w przestrzeni $C(-\pi, \pi)$.

Zad. 9 Udowodnij, że w przestrzeniach unitarnych zachodzi nierówność Schwarza, tzn. dla każdego x, y

$$|\langle x, y\rangle| \leq ||x|| \cdot ||y||.$$

Zad. 10 Niech $\{x_k \colon k \in T\}$ będzie układem ortonormalnym w przestrzeni Hilberta X. Pokaż, że następujące warunki są równoważne:

a) dla każdego $x \in X$, jeśli dla każdego $k \in T$ $\langle x, x_k\rangle = 0$, to x jest wektorem zerowym,

b) dla każdego $x \in X$ mamy $x = \sum_{k \in T} \langle x, x_k\rangle x_k$.