Analiza i Topologia **Lista 6** 5 XII 2017

W poniższych zadaniach, jeśli $C[0,1]$ rozumiemy jako przestrzeń unormowaną normą supremum (o ile nie napisano inaczej).

Zad. 1 Pokaż, że zbiór $A \subseteq C[0,1]$ jest gęsty wtedy i tylko wtedy, kiedy dla każdego $f \in C[0,1]$ istnieje ciąg elementów A zbieżny jednostajnie do f.

Zad. 2 Podaj przykład zbioru $A \subseteq C[0,1]$, który nie jest wypukły.

Zad. 3 Zbadaj zbieżność jednostajną poniższych ciągów:

a) $f_n = x^2/n$ na $\mathbb{R}$;

b) $f_n = x^2/n$ na $[0, 2008]$;

c) $f_n = \sin(x/n)$ na $[0,1]$;

d) $f_n = \ln(e^x + \frac{1}{n})$ na $\mathbb{R}$.

Zad. 4 Zbadaj wnętrza i domknięcia poniższych zbiorów w $C[0,1]$

a) $\{f \in C[0,1] \colon f(0) < 5\}$;

b) $\{f \in C[0,1] \colon f(0) = 1\}$;

c) $\{f \in C[0,1] \colon f \text{ ma miejsce zerowe}\}$;

d) $\{f \in C[0,1] \colon f \text{ jest liniowa}\}$.

Które z tych zbiorów są wypukłe?

Zad. 5 Czy zbiór funkcji różniczkowalnych jest domknięty w $C[0,1]$?

Zad. 6 Podaj przykład ciągu (f_n) elementów $C[0,1]$, który zbiega punktowo do funkcji stale równej 0, ale który nie jest zbieżny jednostajnie. (Wskazówka: lepiej próbować rysować niż szukać wzorów.) Czy potrafisz znaleźć ten ciąg w taki sposób, aby nie był zbieżny w metryce całkowej?

Zad. 7 Rozważmy $\mathbb{R}^2$ (jako przestrzeń liniową). Czy istnieje norma rzeka na $\mathbb{R}^2$? Tzn., czy istnieje norma $||\cdot||_r$ taka, że wzór $d(x,y) = ||x-y||_r$ definiowałby metrykę rzeka? A metrykę dyskretną?

Zad. 8 Dlaczego metryka supremum nie chce być metryką na $C(\mathbb{R})$ (zbiorze funkcji ciągłych określonych na $\mathbb{R}$)?

Zad. 9 Rozważmy przestrzeń $C_b(\mathbb{R})$ (zbiór funkcji ograniczonych, określonych na $\mathbb{R}$) z metryką supremum. Pokaż, że nie jest ona ośrodkowa. (Wskazówka: jak zwykle trzeba zdefiniować *dużą* rodzinę kul parami rozłącznych. Dla $N \subseteq \mathbb{N}$ można rozważyć funkcję $f_N \in C_b(\mathbb{R})$ taką, że $f_N(n) = 1$, jeśli $n \in N$ i $f_N(n) = 0$, jeśli $n \in \mathbb{N} \setminus N$. Spróbuj pomyśleć o kulach o środkach w funkcjach f_N.)

Zadania (nieco) trudniejsze, których rozwiązania złożą się na dowód twierdzenia, że istnieje funkcja ciągła, która nie jest różniczkowalna w żadnym punkcie:

Dla $N \in \mathbb{N}$ i $x \in [0,1]$ rozważmy zbiór

$$\mathcal{L}_x^N = \{f \in C[0,1] \colon \forall y \in [0,1]\ |f(x) - f(y)| \leq N|x-y|\}.$$

Zad. 10 Pokaż, że $\mathcal{L}_x^N$ jest domknięty dla każdego N i x.

Zad. 11 Pokaż, że $\mathcal{L}_x^N$ ma puste wnętrze dla każdego N i x.

Zad. 12 Pokaż, że jeżeli $f \in \mathcal{L}_x^N$, to istnieje $q \in \mathbb{Q}$ i M takie, że $f \in \mathcal{L}_q^M$.

Zad. 13 Pokaz, że jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w x, to istnieje N takie, że $f \in \mathcal{L}_x^N$.

Zad. 14 Wywnioskuj z poprzednich zadań, że zbiór funkcji różniczkowalnych w choć jednym punkcie zawiera się w zbiorze

$$\bigcup\{\mathcal{L}_q^N \colon N \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{Q}\}.$$

Zad. 15 Użyj twierdzenia Baire'a, żeby wywnioskować, że istnieje w takim razie funkcja ciągła, która nie jest różniczkowalna w żadnym punkcie.