# **Analiza i Topologia** **Lista 5** 21 XI 2017

**Zad. 1** Niech $f\colon X \to Y$ będzie dowolną funkcją. Wykaż, że

- jeśli $A \cap B = \emptyset$, $A$, $B \subseteq Y$, to $f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B] = \emptyset$,
- jeśli $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(Y)$, to $\bigcup\{f^{-1}[A]\colon A \in \mathcal{A}\} = f^{-1}[\bigcup\{A\colon A \in \mathcal{A}\}]$,
- jeśli $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(Y)$, to $\bigcap\{f^{-1}[A]\colon A \in \mathcal{A}\} = f^{-1}[\bigcap\{A\colon A \in \mathcal{A}\}]$.

**Zad. 2** Niech $x_0$ będzie ustalonym punktem przestrzeni metrycznej $(X, d)$. Pokaż, że funkcja $f\colon X \to \mathbb{R}$ dana wzorem

$$f(x) = d(x, x_0)$$

jest ciągła (przy czym na $\mathbb{R}$ rozważamy metrykę euklidesową).

**Zad. 3** Podaj przykład funkcji ciągłej $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (w metryce euklidesowej) i zbioru otwartego $U \subseteq \mathbb{R}$ takiego, że jego obraz $f[U]$ nie jest otwarty.

**Zad. 4** Podaj przykład funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która nie jest ciągła (w sensie metryki euklidesowej) w żadnym punkcie.

**Zad. 5** Podaj przykład funkcji $f$, która jest ciągłą bijekcją, ale nie jest homeomorfizmem.

**Zad. 6** Pokaż, że jeśli funkcja $f\colon (X, d) \to (\mathbb{R}, d_{\text{eukl}})$ spełnia chociaż jeden z poniższych warunków, to jest ciągła:

- $f^{-1}(a, b)$ jest otwarty dla każdego $a < b \in \mathbb{R}$,
- $f^{-1}(p, q)$ jest otwarty dla każdego $p < q$, $p, q \in \mathbb{Q}$,
- $f^{-1}[a, b]$ jest domknięty dla każdego $a < b \in \mathbb{R}$,

**Zad. 7** Niech $h\colon (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ będzie homeomorfizmem. Niech $A \subseteq X$. Sprawdź, czy

- $\overline{h(A)} = h(\overline{A})$,
- $\operatorname{Int}(h(A)) = h(\operatorname{Int}(A))$,
- $\operatorname{Bd}(h(A)) = h(\operatorname{Bd}(A))$.

**Zad. 8** Pokaż, że powierzchnia boczna walca w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ jest homeomorficzna z pierścieniem $\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2\colon 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$.

**Zad. 9** (trudniejsze (ale ciekawsze)) Niech $C$ będzie zbiorem Cantora. Oczywiście $C \times C$ jest wtedy podzbiorem $\mathbb{R}^2$ i w takim razie można $C \times C$ rozpatrywać jako przestrzeń metryczną (z metryką dziedziczoną z $\mathbb{R}^2$). Pokaż, że $C$ jest homeomorficzne z $C \times C$. Wywnioskuj, że zbiór Cantora zawiera $\mathfrak{c}$ parami rozłącznych *kopii* zbioru Cantora.

**Zad. 10** (trudniejsze (ale ciekawsze)) Zdefiniujmy funkcję $f\colon [0,1] \to [0,1]$ w następujący sposób:

- $f(x) = \frac{1}{2}$ dla $x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$,
- $f(x) = \frac{1}{4}$ dla $x \in [\frac{1}{9}, \frac{2}{9}]$,
- $f(x) = \frac{3}{4}$ dla $x \in [\frac{7}{9}, \frac{8}{9}]$.

Naszkicuj wykres tej części $f$, która jest zdefiniowana powyżej i spróbuj odgadnąć, jak dalej definiować tę funkcję na przedziałach $[\frac{1}{27}, \frac{2}{27}]$ etc. (wskazówka: funkcja ta nazywana jest „funkcją schodkową“). Zauważ, że funkcja zdefiniowana w ten sposób nie będzie funkcją na całym $[0,1]$ (które punkty nie będą należeć do jej dziedziny?). Okazuje się jednak, że otrzymaną funkcję da się rozszerzyć do funkcji ciągłej $f\colon [0,1] \to [0,1]$. Pokaż, że $f[C] = [0,1]$, gdzie $C$ jest zbiorem Cantora, a więc, że $[0,1]$ jest ciągłym obrazem zbioru Cantora.