
Analiza i Topologia Lista 4 14 XI 2017

Zad. 1 Pokaż, że jeśli zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$ jest zwarty, to ma największy i najmniejszy element.

Zad. 2 Znajdź wnętrze i domknięcie poniższych zbiorów w podanych przestrzeniach (z metrykami euklidesowymi):

- a) $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}$ w \mathbb{R}^2 ;
- b) $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ w \mathbb{R} ;
- c) $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ w $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Zad. 3 Pokaż, że jeśli ciąg (x_n) elementów przestrzeni metrycznej (X, d) jest zbieżny, to spełnia warunek Cauchy'ego.

Zad. 4 Pokaż, że jeśli przestrzeń (X, d) jest zwarta, to jest zupełna.

Zad. 5 Podaj przykład (o ile takowy istnieje):

- a) otwartego i gęstego podzbioru przestrzeni \mathbb{R} z metryką euklidesową;
- b) ciągu Cauchy'ego, który nie jest zbieżny;
- c) zbioru $A \subseteq \mathbb{R}^2$ takiego, że $\text{Int}(BdA) \neq \emptyset$;
- d) przestrzeni zupełnej, która nie jest zwarta;
- e) przestrzeni zwartej, która nie jest spójna.

Zad. 6 Niech $A \subseteq \mathbb{R}$ będzie ograniczony i niech $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą (zarówno na dziedzinie, jak i przedziedzynie, rozpatrujemy metrykę euklidesową). Czy f może być nieograniczona?

Zad. 7 Wybierz parę liter alfabetu łacińskiego (pisanych jak najprostszym krojem) i sprawdź, czy są one homeomorficzne jako podprzestrzenie \mathbb{R}^2 z metryką euklidesową.