Analiza i Topologia Lista 3 7 XI 2017

Zad. 1 Znajdź funkcję ciągłą z przestrzeni X na Y lub wykaż, że takowa nie istnieje.

- $X = \{\langle x, y\rangle : x^2+y^2 = 1\}$ z metryką euklidesową, $Y = [0,1]$ z metryką euklidesową,
- $X = [0,1)$ z metryką euklidesową, $Y = \{\langle x, y\rangle : x^2+y^2 = 1\}$ z metryką euklidesową
- $X = \mathbb{R}$ z metryką dyskretną, $Y = \mathbb{R}$ z metryką euklidesową,
- $X = \mathbb{R}$ z metryką euklidesową, $Y = \mathbb{R}$ z metryką dyskretną,
- $X = [0,1]$ z metryką euklidesową, $Y = (0,1)$ z metryką euklidesową,
- $X = \mathbb{R}$ z metryką euklidesową, $Y = [0,1]$ z metryką euklidesową

Zad. 2 Pokaż, że złożenie funkcji ciągłych $f\colon (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ i $g\colon (Y, d_Y) \to (Z, d_Z)$ jest ciągłe.

Zad. 3 Pokaż, że przestrzenie $(\mathbb{R}^2, d_e)$ i $(\mathbb{R}^2, d_m)$, (d_e - metryka euklidesowa, d_m - metryka miasto), są homeomorficzne. (Wskazówka: rozważ funkcję identycznościową).

Zad. 4 Wykaż, że jeśli $f\colon (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ jest ciągła i „na“, a (X, d_X) jest ośrodkowa, to (Y, d_Y) jest ośrodkowa. (Wskazówka: skorzystaj z „wygodniejszej” definicji zbioru gęstego, staraj się naśladować analogiczne dowody z wykładu).

Zad. 5 Pokaż, że przestrzenie $(\mathbb{R}^2, d_e)$ i $(\mathbb{R}^2, d_c)$ nie są homeomorficzne.

Zad. 6 Pokaż, że jeśli $f\colon (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ jest homeomorfizmem, $x \in X$, to $f_{|X\setminus\{x\}}\colon X\setminus\{x\} \to Y \setminus \{f(x)\}$ jest homeomorfizmem. (Przypomnienie z WdM: jeśli $f\colon X \to Y$, $A \subseteq X$, to $f_{|A}$ jest funkcją $f\colon A \to Y$ taką, że $f_{|A}(x) = f(x)$ dla każdego $x \in A$.)

Zad. 7 Pokaż, że okrąg z metryką euklidesową i $[0,1]$ z metryką euklidesową nie są homeomorficzne. (Wskazówka: wykorzystaj poprzednie zadanie.)

Zad. 8 Niech $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$. Pokaż, że jeśli istnieje przekształcenie liniowe T o niezerowym wyznaczniku takie, że $T[A] = B$, to A i B (z metryką euklidesową) są homeomorficzne.

Zad. 9 Czy prosta i kwadrat są homeomorficzne? Prosta i dwie proste równoległe? Kwadrat i trójkąt? Prosta i parabola? (Wszystkie te obiekty rozpatrujemy z metryką euklidesową.)

Zad. 10 Pokaż, że zbiór Cantora składa się z punktów postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{3^n},$$

gdzie (x_n) jest ciągiem przyjmującym wartości 0 lub 2.

Zad. 11 Wykorzystaj poprzednie zadanie, żeby pokazać, że zbiór Cantora jest homeomorficzny z przestrzenią $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ omawianą ostatnio na wykładzie. (Wskazówka: każdemu ciągowi zerojedynkowemu w naturalny sposób odpowiada pewien ciąg zerodwójkowy.)