Analiza i Topologia Lista 2 24 X 2017

Oznaczenie: Przez $C[0,1]$ oznaczać będziemy zbiór wszystkich funkcji ciągłych określonych na odcinku $[0,1]$ i o wartościach rzeczywistych.

Zad. 1 Pokaż, że metryka euklidesowa na $\mathbb{R}$ jest w istocie metryką.

Zad. 2 Zapisz wzorem metrykę centrum i metrykę rzeka. Wykaż, że rzeczywiście są to metryki.

Zad. 3 Sprawdź, że metryka supremum na $C[0,1]$ jest metryką.

Zad. 4 Jak wyglądają kule na $\mathbb{R}^2$ z metryką rzeka?

Zad. 5 Pokaż, że ciąg (x_n) z $\mathbb{R}^2$ jest zbieżny w metryce euklidesowej wtedy i tylko wtedy, kiedy jest zbieżny w metryce miasto. Podaj przykład ciągu elementów $\mathbb{R}^2$, który jest zbieżny w metryce euklidesowej, ale nie w metryce rzeka.

Zad. 6 Sprawdź, czy poniższe funkcja spełnia warunki metryki na zbiorze $\mathbb{N}^+$.

$$d(n,m) = |\frac{1}{n} - \frac{1}{m}|.$$

Zad. 7 Oblicz $d(f,g)$, jeśli f, $g \in C[0,1]$, d jest metryką supremum i

a) $f(x) = x$, $g(x) = 2x$,

b) $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3 + 3x^2 - 1$.

Zad. 8 Pokaż, że $\mathbb{R}^2$ z metryką miasto jest ośrodkowa.

Zad. 9 Pokaż, że $\mathbb{R}^2$ z metryką rzeka nie jest ośrodkowa. (Wskazówka: wzoruj się na dowodzie z wykładu analogicznego twierdzenia dla metryki centrum.)

Zad. 10 Jak wyglądają kule i zbiory otwarte w przestrzeni $[0,1) \cup [2,3]$ z metryką euklidesową? Jak wyglądają kule i zbiory otwarte w $\mathbb{N}$ z metryką euklidesową? Czy są to przestrzenie zupełne?

Zad. 11 Czy przestrzeń $\mathbb{Q}$ z metryką euklidesową jest zupełna?

Zad. 12 Podaj przykład ciągu zbieżnego i ciągu, który nie jest zbieżny, w przestrzeni $C[0,1]$ z metryką supremum. Czy przestrzeń ta jest zwarta?

Zad. 13 Na zbiorze $[0,1]^{\mathbb{N}}$ (tutaj zakładamy, że $0 \notin \mathbb{N}$) określamy metrykę wzorem

$$d((x_n),(y_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}|x_n - y_n|.$$

Rozważmy kulę $B_{\frac{1}{2}}((a_n))$, gdzie (a_n) jest ciągiem stale równym 0. Podaj przykład elementu (x_n) tej kuli, który nie jest jej środkiem. Następnie znajdź dla tego elementu liczbę N taką, żeby prawdziwe było zdanie:

$$\text{Jeśli } (y_n) \text{ jest taki, że } \forall n < N \; y(n) = x(n), \text{ to } (y_n) \in B_{\frac{1}{2}}((a_n)).$$

Zadania dodatkowe:

Zad. 14 Na wierzchołkach grafu (nieskierowanego, spójnego) można zdefiniować metrykę w następujący sposób: dwa wierzchołki są od siebie odległe o n, jeżeli da się z jednego do drugiego dojść przechodząc przez n krawędzi (ale już nie $n-1$). Sprawdź, że w istocie jest to metryka; zobacz, jak wyglądają w tej przestrzeni metrycznej kule, zbiory otwarte i zbiory domknięte.

Zad. 15 Pokaż, że metryka euklidesowa na $\mathbb{R}^n$ jest w istocie metryką.

Zad. 16 Zastanów się, czy przestrzeń $C[0,1]$ z metryką supremum jest ośrodkowa. Jaki byłby kandydat na przeliczalny zbiór gęsty?

Zad. 17 Pokaż, że każdy ciąg elementów $\mathbb{R}^2$, który jest zbieżny w metryce rzeka, jest również zbieżny w metryce euklidesowej.