Analiza i Topologia   Lista 12

Zad. 1 Pokaż, że jeżeli μ i ν są miarami określonymi na tym samym σ-ciele, to $a\cdot\mu+b\cdot\nu$ jest miarą (określoną na tym samym σ-ciele) dla każdego $a > 0$, $b > 0$.

Zad. 2 Niech μ i ν będą miara określonymi na tym samym σ-ciele podzbiorów X. Pokaż, że

$$\int_X f \; d(\mu+\nu) = \int_X f \; d\mu + \int_X f \; d\nu$$

dla każdej funkcji mierzalnej f.

Zad. 3 Rozważmy przestrzeń miarową (X, Σ, μ). Niech Π będzie σ-ciałem określonym na Y i niech $f\colon X \to Y$ będzie funkcją taką, że $f^{-1}[A] \in \Sigma$ dla każdego $A \in \Pi$. Udowodnij, że funkcja zdefiniowana przez

$$\nu(A) = \mu(f^{-1}[A])$$

jest miarą określoną na Π.

Zad. 4 Niech μ będzie miarą liczącą określoną na $\mathrm{Bor}(\mathbb{R})$. Pokaż, że $\lambda \ll \mu$, ale nie zachodzi $\mu \ll \lambda$.

Zad. 5 Załóżmy, że μ jest absolutnie ciągła względem μ, a μ absolutnie ciągła względem ν. Pokaż, że jeżeli

$$f = \frac{d\mu}{d\nu}, \text{ to}$$

$$1/f = \frac{d\nu}{d\mu}.$$

Zad. 6 Rozważmy przestrzeń miarową $(\mathbb{R}, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}), \mu)$, gdzie $\mu = \lambda + \delta_5$. Pokaż, że zarówno λ, jak i δ_5 są absolutnie ciągłe względem μ. Znajdź pochodne Radona-Nikodyma $d\lambda/d\mu$ i $d\delta_5/d\mu$.

Zad. 7 Pokaż, że dystrubuanta miary μ określonej na $\mathrm{Bor}(\mathbb{R})$ jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy $\mu(\{x\}) = 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.