Analiza i Topologia Lista 11 (przedkolokwialna)

Zad. 1 Wskaż przykład ciągu (f_n) z przestrzeni $C[0,1]$, który jest zbieżny jednostajnie do funkcji $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x) = \sin x$.

Zad. 2 Wskaż przykład ciągu (f_n), który jest zbieżny punktowo do funkcji z poprzedniego zadania, ale nie jest zbieżny jednostajnie, lub wykaż, że taki ciąg nie istnieje.

Zad. 3 Jaki jest związek zbieżności punktowej, zbieżności jednostajnej, zbieżności w metryce supremum i zbieżności w metryce całkowej? Podaj wynikania lub kontrprzykłady.

Zad. 4 Jaki jest związek między pojęciami: przestrzeń metryczna, przestrzeń liniowa, przestrzeń unormowana, przestrzeń Banacha, przestrzeń unitarna, przestrzeń Hilberta, przestrzeń miarowa, przestrzeń euklidesowa?

Zad. 5 Podaj przykład przestrzeni Hilberta, która nie jest postaci $\mathbb{R}^n$ dla żadnego $n \in \mathbb{N}$.

Zad. 6 Pokaż, że dla każdego zbioru borelowskiego $B \subseteq \mathbb{R}$

$$\lambda(B) = \sup\{\lambda(F)\colon F \subseteq B \text{ i } F \text{ jest domknięty.}\}.$$

Zad. 7 Wykaż, że miara Lebesgue'a jest niezmiennicza na przesunięcia, tzn. $\lambda(A) = \lambda(x + A)$ dla każdego borelowskiego $A \subseteq \mathbb{R}$ i $x \in \mathbb{R}$ (Tutaj: $x + A = \{x + a\colon a \in A\}$). Jak sformułować analogiczne stwierdzenie dla miary Lebesgue'a λ_2 na płaszczyźnie?

Zad. 8 Znajdź zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$ taki, że łącznie spełnione są warunki:

- $\lambda(\mathrm{Int}(A)) = 2$ i
- $\lambda(A) = 5$ i
- $\lambda(\overline{A}) = 17$.

Zad. 9 Załóżmy, że dla zbiorów borelowskich A, $B \subseteq [0,1]^2$ zachodzi:

$$\forall x\ \lambda(A_x) = \lambda(B_x).$$

Wykaż, że w takim razie $\lambda_2(A) = \lambda_2(B)$. Pokaż, że ta równość byłaby spełniona również, gdy $\lambda(A_x) = \lambda(B_x)$ prawie wszędzie.

Zad. 10 Sformułuj twierdzenie o zbieżności monotonicznej i twierdzenie o zbieżności zmajoryzowanej.

Zad. 11 Sprawdź, że funkcja μ określona na $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ dana wzorem

$$\mu(A) = \frac{1}{3}\delta_1(A) + \frac{2}{3}\delta_2(A)$$

dla każdego $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, jest miarą. Oblicz całkę

$$\int_{\mathbb{R}} \sin x \; d\mu.$$

Podaj przykład takiej funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że

$$\int_{[0,1]} f \, d\mu = 15.$$

Zad. 12 Udowodnij tzw. nierówność Czebyszewa, tzn.

$$\int_X f \, d\mu \leq \epsilon \cdot \mu(\{x \in X\colon f(x) \geq \varepsilon\}).$$

Tutaj (X, Σ, μ) jest przestrzenią miarową, f jest funkcją mierzalną *nieujemną*, a $\varepsilon > 0$.

Zad. 13 Załóżmy, że (X, Σ, μ) jest przestrzenią probabilistyczną (tzn. $\mu(X) = 1$). Pokaż, że jeżeli rodzina $\{A_n\colon n \in \mathbb{N}\} \subseteq \Sigma$ jest taka, że $\mu(A_n) = 1$ dla każdego n, to $\mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}) = 1$. Czy ten fakt zachodzi dla przestrzeni miarowych, które nie są probabilistyczne?

Zad. 14 Załóżmy, że (X, Σ, μ) jest przestrzenią probabilistyczną (tzn. $\mu(X) = 1$) i $\mathcal{A}$ jest rodziną (niekoniecznie przeliczalną) zbiorów takich, że $\mu(A) = 1$ dla każdego $A \in \mathcal{A}$. Czy $\mu(\bigcap \mathcal{A}) = 1$?

Zad. 15 Załóżmy, że (X, Σ, μ) jest przestrzenią miarową i $\{A_1, \ldots, A_N\} \subseteq \Sigma$. Pokaż, że

$$\sum_{n=1}^{N} \mu(A_n) \leq \mu(\bigcup_{n=1}^{N} A_n) - \sum_{k<j<N} \mu(A_k \cap A_j)$$

Zacznij od prostych przypadków (np. rodziny dwulementowej).

Zad. 16 Oblicz

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} \frac{n^2 x + 2}{n^2 x + n + 3} \, d\lambda$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty)} \frac{n}{x n^2 + 3} \, d\lambda.$$

Zad. 17 Opisz przestrzeń miarową (X, Σ, μ) związaną z rzutem kostką i przestrzeń miarową (Y, Π, ν) związaną z rzutem monetą. Opisz miarę produktową $\mu \otimes \nu$. Z jakimi wydarzeniami losowymi jest ona związana?

Zadania nieco trudniejsze:

Zad. 18 Niech $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie przekształceniem liniowym. Jaki jest związek miary $\lambda(A)$ i $\lambda(T(A))$ dla A będącego borelowskim podzbiorem płaszczyzny? Sprawdź najpierw dla wybranych przekształceń, a później sformułuj hipotezę.

Zad. 19 Niech X będzie sumą rozłącznych zbiorów $A_1, ..., A_n$. Opisz σ-ciało generowane przez $\{A_1, ..., A_n\}$. Ile ma elementów? Pokaż, że dowolne σ-ciało generowane przez skończoną rodzinę zbiorów (niekoniecznie rozłącznych) ma 2^n elementów dla pewnego n.

Zad. 20 Udowodnij, że jeśli $\mathcal{A}$ jest σ-ciałem, to albo $\mathcal{A}$ jest skończone, albo $|\mathcal{A}| > \aleph_0$.