Analiza i Topologia Lista 10 16 I 2018

Zad. 1 Niech (X, Σ, μ_1), (Y, Π, μ_2) będą przestrzeniami miarowymi. Pokaż, że

$$\mu_1 \otimes \mu_2(A \times B) = \mu_1(A) \cdot \mu_2(B)$$

dla każdego $A \in \Sigma$, $B \in \Pi$.

Zad. 2 Oblicz miarę $\lambda_2(A)$, gdzie

a) $A = [0, 1] \times \{0, 1\}$,

b) $A = \{\langle x, y\rangle : x - y \in \mathbb{Q}\}$.

Zad. 3 Rozważmy przestrzeń miarową $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{P}(\mathbb{R}), \lambda \otimes \mu)$, gdzie μ jest miarą liczącą. Oblicz miarę $\lambda \otimes \mu(A)$, gdzie

a) $A = [0, 1] \times \{0, 1\}$,

b) $A = \{\langle n, m\rangle \in \mathbb{N}^2 : n \leq m\}$.

Zad. 4 Niech $E \in \mathrm{Bor}([0, 1]^2)$. Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadaną wzorem $f_E(x) = \lambda(E_x)$.

a) Pokaż, że jeśli $E = A \times B$, to f_E jest borelowska,

b) Pokaż, że jeśli f_E jest borelowska i $F = [0, 1]^2 \setminus E$, to f_F jest borelowska. (Wskazówka: jak zapisać f_F używając f_E?)

c) Pokaż, że jeśli f_{E_n} są borelowskie, (E_n) jest ciągiem wstępującym i $E = \bigcup E_n$, to f_E jest borelowska. (Wskazówka: jak zapisać f_E przy pomocy f_{E_n}?)

Zad. 5 Rozważmy przestrzeń miarową $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, gdzie μ jest miarą liczącą.

- Pokaż, że $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathcal{P}(\mathbb{N}) = \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$,
- Pokaż, że $\mu \otimes \mu$ jest miarą liczącą,

Zad. 6 Użyj twierdzenia Fubiniego, żeby pokazać, że jeśli ciąg podwójnie indeksowany $(a_{n,m})$ liczb nieujemnych jest taki, że

$$\sum_{n,m=1} a_{n,m} < \infty,$$

to

$$\sum_{n,m=1} a_{n,m} = \sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m}).$$

Wskazówka: rozważ miarę z poprzedniego zadania.

Zad. 7 Niech $E \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^2)$ i niech $x \in \mathbb{R}$. Pokaż, że $E_x \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R})$.