Analiza i Topologia **Lista 1** 17 X 2017

Na tej liście rozważamy jedynie przestrzenie euklidesowe.

Zad. 1 Pokaż, że suma dowolnie wielu zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym (w razie trudności, na początku spróbuj dowieść, że suma dwóch zbiorów otwartych jest otwarta).

Zad. 2 Pokaż, że jeżeli zbiory U_1, $U_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ są otwarte, to $U_1 \cap U_2$ jest otwarty. Wywnioskuj, że przekrój skończenie wielu zbiorów otwartych jest otwarty.

Zad. 3 Wywnioskuj z poprzednich dwóch zadań analogiczne twierdzenia dla zbiorów domkniętych.

Zad. 4 Rozważ ciąg zbiorów $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \subseteq \mathbb{R}$, aby wykazać, że przekrój nieskończenie wielu zbiorów otwartych nie musi być otwarty. Podaj przykład świadczący, że suma nieskończenie wielu zbiorów domkniętych nie musi być domknięta.

Zad. 5 Zdefiniuj podzbiór $\mathbb{R}^5$, który nie jest ani otwarty ani domknięty.

Zad. 6 Pokaż, że dla każdego zbioru $A \subseteq \mathbb{R}^n$ zachodzi

$$\overline{A} = (\mathrm{Int}(A^c))^c.$$

Zad. 7 Odpowiedz na poniższe pytania (uzasadniając odpowiedź):

a) czy istnieje zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$, taki że $Int(A) = \{1\}$?

b) czy suma dwóch zbiorów gęstych musi być gęsta?

c) czy przekrój dwóch zbiorów gęstych musi być gęsty?

d) czy zbiór gęsty może być puste wnętrze?

e) czy zbiór gęsty może być otwarty?

f) czy zbiór o pustym wnętrzu może być otwarty?

g) czy zbiór gęsty może być zwarty?

Zad. 8 Zdefiniuj 3 parami rozłączne podzbiory gęste $\mathbb{R}$. Cztery... Pięć... Nieskończenie wiele...

Zad. 9 Znajdź wnętrza, domknięcia i brzegi poniższych podzbiorów $\mathbb{R}$:

$$\{0,1,2\}, \quad \mathbb{N}, \quad (0,1)\cup(2,3], \quad \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, \quad \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}, \quad \mathbb{R}\setminus\{5\}, \quad \{k + \frac{1}{n} : n, k \in \mathbb{N}\}$$

Które z nich są otwarte, które domknięte, które gęste, a które zwarte?

Zad. 10 Znajdź wnętrza, domknięcia i brzegi poniższych podzbiorów płaszczyzny:

$$\emptyset,\quad \mathbb{Q}\times\mathbb{Q},\quad \{\langle x,y\rangle\colon x<y\},\quad [0,1]\times(0,1),\quad \{\langle x,y\colon \sqrt{x^2+y^2}<9\}\cup\{\langle 3,0\rangle,\langle 0,3\rangle\},\quad \mathbb{N}\times\mathbb{Q}$$

Które z nich są otwarte, które domknięte, które gęste, a które zwarte?

Zad. 11 Wykaż, że podzbiory $\mathbb{R}^n$ postaci $(a_1,b_1)\times\cdots\times(a_n,b_n)$ są otwarte, a $[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]$ są domknięte.

Zad. 12 Znajdź błąd w poniższym rozumowaniu: *zbiór dwupunktowy* $A=\{0,1\}\subseteq\mathbb{R}$ *nie jest domknięty. Rozważmy bowiem ciąg* $0,1,0,1,\ldots$*. Jest to ciąg elementów* A *i nie jest zbieżny, co przeczy definicji zbioru domkniętego.*

Zad. 13 Pokaż, że ciąg punktów $(x_n(0),x_n(1))$ w $\mathbb{R}^2$ jest zbieżny do $x=(x(0),x(1))$ wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg $(x_n(0))$ zbiega do $x(0)$, a ciąg $(x_n(1))$ do $x(1)$. Jak uogólnić ten fakt na przestrzenie o większej liczbie wymiarów?

Zad. 14 Wywnioskuj z definicji ciągu zbieżnego w $\mathbb{R}^n$, że

a) ciąg zbieżny ma tylko jedną granicę;

b) każdy podciąg ciągu zbieżnego jest zbieżny.