Analiza i Topologia **Lista 0** 10 X 2017

Przypomnienie. Powiemy, że $a \in \mathbb{R}$ jest **ograniczeniem górnym** zbioru $A \subseteq \mathbb{R}$, jeżeli A nie posiada elementu większego od a. Natomiast a jest **kresem górnym** zbioru A, jeżeli jest najmniejszym z ograniczeń górnych A (piszemy $a = \sup A$, przy czym $\sup A = \infty$, jeżeli A nie jest ograniczony z góry). Definicje ograniczenia i kresu dolnego definiuje się analogicznie (kres dolny oznacza się przez inf).

Zad. 1 Zdefiniuj ograniczenie dolne i kres dolny.

Zad. 2 Wykonaj poniższe polecania posługując się ściśle definicjami kresów.

a) zauważ, że jeżeli zbiór A ma największy element, to jest on jego kresem górnym,

b) sprawdź, czy największy element zbioru A może być jego kresem dolnym,

c) oblicz kresy zbiorów $(0,1)$, $[0,1]$,

d) oblicz kresy zbiorów $\{1/n\colon n \in \mathbb{N}\}$, $\{k/n\colon k,n \in \mathbb{N}\}$, $\{k/n\colon n \in \mathbb{N},\ 0 < k < n\}$,

e) oblicz $\sup\{\sin(x)\colon x \in [0,1)\}$.

Zad. 3 Pokaż, że

$$\sup\{f(x) + g(x)\colon x \in A\} \leq \sup\{f(x)\colon x \in A\} + \sup\{g(x)\colon x \in A\}$$

dla każdego niepustego $A \subseteq \mathbb{R}$ i dowolnych funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Zad. 4 Jaka jest relacja między $\lim a_n$ a $\sup\{a_n\colon n \in \mathbb{N}\}$, jeśli (a_n) jest zbieżny i rosnący? A jeśli jest tylko zbieżny?

Zad. 5 Oblicz $\bigcup_{t\in\mathbb{R}} A_t$ i $\bigcap_{t\in\mathbb{R}} A_t$, jeśli

a) $A_t = \{x\colon x > t\}$,

b) $A_t = \{x\colon \sin x = t\}$,

c) $A_t = \{\langle x,y\rangle\colon x^2 + y^2 < t\}$,

d) $A_t = \{\langle x,y\rangle\colon x + t = y\}$,

e) $A_t = \{\langle x,y\rangle\colon x < t \cdot y\}$.

Zad. 6 Dla $n,m \in \mathbb{N}$ niech $A^n_m = \{x \in \mathbb{R}\colon n \leq x < m\}$. Oblicz

a) $\bigcup_n \bigcup_m A^n_m$,

b) $\bigcap_n \bigcap_m A^n_m$,

c) $\bigcup_n \bigcap_m A^n_m$,

d) $\bigcap_n \bigcup_m A^n_m$.

Zad. 7 Niech (A_n) będzie ciągiem podzbiorów $\mathbb{R}$. Wykaż, że

$$\bigcap_n \bigcup_{k>n} A_k = \{x \in \mathbb{R} \colon x \in A_n \text{ dla nieskończenie wielu } n\}.$$

Czy potrafisz znaleźć podobną charakteryzację zbioru

$$\bigcup_n \bigcap_{k>n} A_k?$$

Zad. 8 Znajdź ciąg (A_n) podzbiorów $\mathbb{R}$, dla którego

$$\bigcap_n \bigcup_{k>n} A_k \neq \bigcup_n \bigcap_{k>n} A_k.$$