Kolokwium 2, Część 1 Grupa: Imię i nazwisko:

Ankieta:

Czy rozważasz wybór Teorii prawdopodobieństwa na 4. semestrze?

Wybór której specjalności rozważasz?

Zad. 1 Odpowiedz na poniższe pytania (w punktach (a)-(e)) podając krótkie uzasadnienia).

a) Czy każda funkcja ciągła $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest borelowska?

b) Czy zbiór ograniczony na płaszczyźnie musi być skończonej miary Lebesgue'a?

c) Czy ciąg jednostajnie zbieżny funkcji borelowskich musi zbiegać do funkcji borelowskiej?

d) Czy rodzina zbiorów otwartych tworzy σ-ciało?

e) Czy przestrzeń $C[0,1]$ jest ośrodkowa?

f) Co to jest przestrzeń miarowa?

g) Jak brzmi twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej?

Kolokwium 2, Część 2 Grupa: Imię i nazwisko:

Zad. 2 Oznaczmy przez μ miarę liczącą na prostej, a przez δ_1 deltę Diraca w punkcie 1. λ to miara Lebesgue'a na prostej, a λ_2 miara Lebesgue'a na płaszyźnie. W końcu $K = \{\langle x, y\rangle \colon x^2 + y^2 < 1\}$. Oblicz

$$\int_{\mathbb{Q}} x^2 \, d\lambda =$$

$$\int_{[1,2]} \frac{1}{x} \, d\lambda =$$

$$\int_{[1,2]} \frac{1}{x} \, d\delta_1 =$$

$$\int_{[1,2]} \frac{1}{x} \, d\mu =$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} 4\chi_K \, d\lambda_2 =$$

Kolokwium 2, Część 3 Grupa: Imię i nazwisko:

Zad. 3 Rozważmy poniższe ciągi elementów $C[0,1]$. W przypadku każdego z nich odpowiedz na pytania:

- czy ciąg jest zbieżny jednostajnie?
- czy ciąg jest zbieżny w metryce całkowej?
- czy ciąg jest Cauchy'ego w metryce supremum?

(Przypomnienie: norma całkowa jest dana wzorem $||f|| = \int_0^1 |f| \, dx$.)

$$f_n(x) = x^n$$

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n}$$

$$f_n(x) = \sin(nx)$$

Kolokwium 2, Część 4 Grupa: Imię i nazwisko:

Zad. 4 Niech $f(x) = x$. Podaj przykład funkcji prostej $p\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ takiej, że $p(x) \leq f(x)$ dla każdego $x \in [0,1]$ i

$$\int_{[0,1]} p \, d\lambda > 1/4.$$

Zad. 5 Pokaż, że jeśli $B \subseteq \mathbb{R}$ jest zbiorem borelowskim i $\lambda(B) < \infty$, to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór otwarty U taki, że $B \subseteq U$ i $\lambda(U \setminus B) < \varepsilon$.