Kolokwium 2, Część 1 Grupa: Imię i nazwisko:

Zad. 1 Podaj przykłady (lub napisz krótko, dlaczego takowe nie istnieją):

a) Zbioru $A \subseteq \mathbb{R}$ nieograniczonego z góry takiego, że $\lambda(A) = 0$.

b) Ciągu funkcji z $C[0,1]$, który jest zbieżny punktowo, ale nie jest zbieżny w metryce supremum.

c) Ciągu funkcji z $C[0,1]$ zbieżnego jednostajnie do funkcji $\chi_{\mathbb{Q}}$.

d) σ-ciała zawierającego wszystkie podzbiory otwarte $\mathbb{R}$, ale nie zawierającego pewnego zbioru domkniętego.

e) Zbioru wypukłego $A \subseteq \mathbb{R}$, który nie jest ani otwarty ani domknięty.

f) Miary określonej na $\mathrm{Bor}(\mathbb{R})$ takiej, że $\mu((0,1)) = 5$.

g) Funkcji borelowskiej f takiej, że $\int_{\mathbb{Q}} f \, d\lambda = 2$.

Zad. 2 Oznaczmy przez μ miarę liczącą na prostej, a przez δ_3 deltę Diraca w punkcie 3. Oblicz

$$\int_{\{1,2\}} \frac{1}{x}\, d\lambda =$$

$$\int_{[1,2]} \sin(x)\, d\lambda =$$

$$\int_{[1,2]} \frac{1}{x}\, d\delta_3 =$$

$$\int_{\{1,2\}} \frac{1}{x}\, d\mu =$$

$$\int_{[0,1]} \chi_{[1,2]}\, d\lambda =$$

Kolokwium 1, Część 2 Grupa: Imię i nazwisko:

Zad. 3 Zbadaj zbieżność punktową, zbieżność jednostajną i zbieżność w metryce całkowej poniższych ciągów (Przypomnienie: norma całkowa dana jest wzorem $||f|| = \int_0^1 |f|dx$).

$$f_n(x) = \sqrt[n]{x}$$

$$f_n(x) = nx$$

$$f_n(x) = \frac{\sin x}{n}$$

Zad. 4 Niech funkcja $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem

$$p(x) = a_1 \cdot \chi_{A_1} + \cdots + a_2 \cdot \chi_{A_2} + \cdots + a_n \cdot \chi_{A_n},$$

gdzie (A_n) jest ciągiem parami rozłącznych zbiorów borelowskich. Napisz, ile wynosi

$$\int_{\mathbb{R}} p \, d\lambda.$$

Czy ta wartość musi być skończona?

Zad. 5 Pokaż, że jeśli $B \subseteq \mathbb{R}$ jest zbiorem borelowskim i $\lambda(B) < \infty$, to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór otwarty U taki, że $B \subseteq U$ i $\lambda(U \setminus B) < \varepsilon$.