Egzamin II, Część 1   Imię i nazwisko:

Zad. 1 (3) Pokaż, że jeśli ciąg (x_k) w przestrzeni metrycznej (X, d) jest zbieżny, to jest też ciągiem Cauchy'ego.

Zad. 2 (3) Sprawdź, że funkcja $d(x, y) = |\mathrm{tg}(x) - \mathrm{tg}(y)|$ jest metryką na odcinku $(-\pi/2, \pi/2)$. Czy zbiór $[0, \pi/2)$ jest ograniczony w przestrzeni $((0, 1), d)$? Odpowiedź uzasadnij.

Egzamin II, Część 2 Imię i nazwisko:

Zad. 3 (4) Zbadaj czy poniższe ciągi elementów $C([0,1])$ są zbieżne punktowo, w metryce supremum i w metryce całkowej.

a) $f_n(x) = \frac{x^2}{n} + n$.

b) $g_n(x) = \sqrt[n]{x}$.

Zad. 4 (3) Znajdź domknięcie i wnętrze poniższego zbioru w $C[0,1]$ z metryką supremum:

$$\{f \in C[0,1]\colon f(\frac{1}{2}) > 4\}$$

Czy jest to zbiór wypukły? Odpowiedzi uzasadnij.

Egzamin II, Część 3 Imię i nazwisko:

Zad. 5 (2) Podaj definicję miary Lebesgue'a na prostej.

Zad. 6 (2) Niech $A \subseteq \mathbb{R}$ będzie taki, że $\lambda(A) < \infty$. Pokaż, że $\lim_{n\to\infty} \lambda(A \cap (n, \infty)) = 0$.

Zad. 7 (2+3) Podaj przykład zbioru A takiego, że $\mathrm{Int}(A) = \emptyset$, $\lambda(A) = 5$. (Trudniejsza wersja: załóż dodatkowo, że $A \subseteq \mathbb{Q}$).

Egzamin II, Część 4   Imię i nazwisko:

Zad. 8 (2) Niech (X, Σ, μ) będzie przestrzenią miarową, a f funkcją mierzalną dodatnią. Zdefiniuj

$$\int_X f \, d\mu.$$

Zad. 9 (2) Pokaż, że rodzina zbiorów postaci (r, ∞) dla $r \in \mathbb{R}$ generuje σ-ciało zbiorów borelowskich na $\mathbb{R}$.

Zad. 10 (2) Oblicz

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[1,3]} \frac{1}{1+ne^x} \, d\lambda.$$