Egzamin, Część 1 Imię i nazwisko:

Zad. 1 Wybierz swoją ulubioną metrykę na $\mathbb{R}^2$ i podaj przykład zbioru $A \subseteq \mathbb{R}^2$ spełniający poniższe własności (w sensie Twojej metryki) lub uzasadnij, że taki nie istnieje:

a) metryka:

b) A nie jest ani otwarty ani domknięty,

c) A jest zarówno otwarty, jak i domknięty,

d) A ma brzeg będący całym $\mathbb{R}^2$.

Zad. 2 Podaj przykład zbioru $A \subseteq \mathbb{R}^2$, który jest domknięty, ograniczony i nie jest zwarty w metryce centrum. Podaj krótkie uzasadnienie.

Egzamin, Część 2 Imię i nazwisko:

Zad. 3 Zbadaj czy poniższe ciągi elementów $C([0,1])$ są zbieżne punktowo, w metryce supremum i w metryce całkowej.

a) $f_n(x) = |x - \frac{1}{n}|$

b) $g_n(x) = \sqrt[n]{x}$.

Zad. 4 Znajdź domknięcie i wnętrze poniższego zbioru w $C[0,1]$ z metryką supremum:

$$\{f \in C[0,1]\colon \int_{[0,1]} f \, d\lambda = 0\}$$

Czy jest to zbiór wypukły? Odpowiedź uzasadnij.

Egzamin, Część 3 Imię i nazwisko:

Zad. 5 Oblicz $\lambda(A)$, $\delta_{4/27}(A)$ i $\mu(A)$ (μ jest miarą liczącą), jeśli

$$A = C \cup ((2, 7) \setminus \mathbb{Q}),$$

gdzie C jest zbiorem Cantora.

Zad. 6 Podaj przykład zbioru $A \subseteq \mathbb{R}$ takiego, że $\lambda(A) = 1$ i dla każdego otwartego U zawierającego A mamy $\lambda(U) > 1$. Podaj krótkie uzasadnienie.

Zad. 7 Podaj przykład zbioru $A \subseteq \mathbb{R}$ takiego, że $\lambda(A) < \infty$, ale $\lambda(A \cap [n, \infty)) > 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Podaj krótkie uzasadnienie.

Egzamin, Część 4 Imię i nazwisko:

Zad. 8 Oznaczmy
$$\Delta = \{\langle x, y\rangle \colon x = y, x, y \in \mathbb{R}\}.$$

a) Pokaż, że
$$\Delta \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R}) \otimes \mathrm{Bor}(\mathbb{R}).$$

b) Znajdź $\lambda_2(\Delta)$. Odpowiedź uzasadnij.

Zad. 9 Pokaż, że
$$\int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} \chi_{[n,n+1]}\, d\lambda < \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \chi_{[n,n+1]}\, d\lambda$$
Wyjaśnij, dlaczego fakt ten nie stoi w sprzeczności ani z twierdzeniem Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej ani z twierdzeniem Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej.