Analiza i Topologia R **Lista 9** 17 I 2022

Zad. 1 Niech (X, Σ, μ) będzie przestrzenią miarową. Powiemy, że własność $(\star)$ zachodzi **niemal** wszędzie, jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ znajdziemy zbiór $B \in \Sigma$ taki, że $(\star)$ zachodzi poza zbiorem B. Wykaż, że f_n jest zbieżny niemal wszędzie do f wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbieżny prawie wszędzie do f.

Zad. 2 Niech ν będzie miarą określoną na rodzinie zbiorów borelowskich zdefiniowaną przez

$$\nu(A) = \int_A x^2 \, d\lambda,$$

gdzie λ jest miarą Lebesgue'a. Oblicz

$$\int_{[0,1]} \sin x \, d\nu.$$

Zad. 3 Załóżmy, że μ i ν są miara określonymi na tej samej σ-algebrze i że $\nu \ll \mu$ oraz $\mu \ll \nu$. Znajdź związek między $\frac{d\mu}{d\nu}$ a $\frac{d\nu}{d\mu}$.

Zad. 4 Oblicz miarę $\lambda \otimes \lambda(E)$, gdzie

a) $E = [0,1] \times \{0,1\}$,

b) $E = \{\langle x, y \rangle \colon x - y \in \mathbb{Q}\}$.

Zad. 5 Rozważmy przestrzeń miarową $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{P}(\mathbb{R}), \lambda \otimes \mu)$, gdzie μ jest miarą liczącą. Oblicz miarę $\lambda \otimes \mu(A)$, gdzie

a) $A = [0,1] \times \{0,1\}$,

b) $A = \{\langle n, m \rangle \in \mathbb{N}^2 \colon n \leq m\}$.

Zad. 6 Załóżmy, że dla zbiorów borelowskich A, $B \subseteq [0,1]^2$ zachodzi:

$$\forall x \ \lambda(A_x) = \lambda(B_x).$$

Wykaż, że w takim razie $\lambda_2(A) = \lambda_2(B)$. Pokaż, że ta równość byłaby spełniona również, gdy $\lambda(A_x) = \lambda(B_x)$ prawie wszędzie.

Zad. 7 Stosując tw. Fubiniego wyprowadź wzór na objętość stożka o wysokości h, którego podstawą jest zbiór borelowski $B \subseteq \mathbb{R}^2$.

Zad. 8 Dwie osoby losują liczby z przedziału $[0,1]$. Rozkład prawdopodobieństwa związany z losowaniem pierwszej osoby jest dany przez

$$\mu_1(A) = \int_A 3x^2 \, d\lambda,$$

a drugiej przez

$$\mu_2(A) = \int_A 2 - 2x \, d\lambda.$$

(Tzn., że prawdopodobieństwo wylosowania przez i-tą osobę liczby ze zbioru A wynosi $\mu_i(A)$.) Jakie jest prawdopodobieństwo, że liczba wylosowana przez pierwszą osobę będzie dwa razy mniejsza niż przez drugą?

Zad. 9 Rozważmy przestrzeń $(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \Sigma, \mu)$, gdzie Σ i μ to σ-algebra i miara produktowa podane na wykładzie. Oblicz $\mu(A)$, jeśli

- A jest zbiorem tych ciągów $x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, w których jedynka pojawiła się nieskończenie wiele razy,
- A jest zbiorem tych ciągów $x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, w których sekwencja $(1,0,1,1)$ pojawia się przynajmniej raz,
- A jest zbiorem tych ciągów $x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, w których sekwencja $(1,0,1,1)$ pojawia się dokładnie raz.