Analiza i Topologia R **Lista 8** 3/10 I 2022

Zad. 1 Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie zdefiniowana przez $f(x) = \inf_n f_n(x)$, gdzie (f_n) jest pewnym ciągiem funkcji borelowskich. Pokaż, że f jest borelowska.

Zad. 2 Załóżmy, że $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ są borelowskie. Pokaż, że funkcje $\max(f, g)$, $|f|$, $f + g$ też są borelowskie.

Zad. 3 Załóżmy, że $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ są funkcjami prostymi.

- Pokaż, że istnieje N, zbiory parami rozłączne $(A_n)_{n<N}$ i liczby rzeczywiste $(a_n)_{n<N}$ takie, że
$$f(x) = \sum_{n<N} a_n \chi_{A_n}.$$
- Pokaż, że istnieje N, ciąg wstępujący zbiorów $(A_n)_{n<N}$ i liczby rzeczywiste $(a_n)_{n<N}$ takie, że
$$f(x) = \sum_{n<N} a_n \chi_{A_n}.$$
- Pokaż, że istnieje N, ciąg $(A_n)_{n<N}$ oraz ciągi $(a_n)_{n<N}$, $(b_n)_{n<N}$ takie, że
$$f(x) = \sum_{n<N} a_n \chi_{A_n},$$
$$g(x) = \sum_{n<N} b_n \chi_{A_n}.$$

Zad. 4 Pokaż, że jeżeli $\mu(\{x \in X\colon f(x) = g(x)\}) = 0$, to
$$\int f \, d\mu = \int g \, d\mu.$$
Pokaż, że nie zachodzi odwrotna implikacja.

Zad. 5 Oblicz całkę $\int_{[0,1]} g \, d\lambda$, gdzie
$$g(x) = \begin{cases} x^2 \text{ dla } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}, \\ \sin(x^2) \text{ dla } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Zad. 6 Pokaż, że jeżeli μ i ν są miarami określonymi na tym samym σ-ciele, to funkcja $\mu + \nu$ również jest miarą. Podobnie, jeśli (μ_n) jest ciągiem miar określonych na jednym σ-ciele, to $\sum_n a_n \mu_n$ jest miarą dla każdego ciągu (a_n) liczb rzeczywistych.

Zad. 7 Udowodnij, że
$$\int f \, d(\mu + \nu) = \int f \, d\mu + \int f \, d\nu.$$

Zad. 8 Udowodnij tzw. nierówność Czebyszewa, tzn.

$$\int_X f\ d\mu \geq \varepsilon \cdot \mu(\{x \in X \colon f(x) \geq \varepsilon\}).$$

Tutaj (X, Σ, μ) jest przestrzenią miarową, f jest funkcją mierzalną *nieujemną*, a $\varepsilon > 0$.

Zad. 9 Rozważmy $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, gdzie μ jest miarą liczącą. Niech $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ będzie ciągiem. Pokaż, że

$$\int f\ d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

Zad. 10 Podaj przykład funkcji całkowalnej f, takiej że, jeśli p jest funkcja prostą, $p \leq f$, to p nie jest całkowalna. Dlaczego istnienie takich przykładów powoduje to, że całkę Lebesgue'a definiuje się w czterech krokach, a nie w trzech?

Zad. 11 Rozważmy następującą grę: z przedziału $[0, 1]$ losujemy liczbę, a za wylosowanie liczby x otrzymamy $12x^2 - 5$ złotych. (Dla przykładu: za wylosowanie 0 musimy zapłacić 5 złotych, a za wylosowanie 1 otrzymamy 7 złotych.) Czy warto grać w tę grę (pomijając walor poznawczy związany z możliwością otrzymania niewymiernie wielu złotych)? Wskazówka: użyj wartości oczekiwanej.

Zad. 12 Oblicz

$$\lim_{n\to\infty} \int \frac{n \sin(x/n)}{x(x^2+1)}\ dx.$$

Wskazówka: zbadaj granicę punktową ciągu pod całką. Użyj któregoś z twierdzeń granicznych.

Zad. 13 Oblicz

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{n^2x + 2}{n^2x + n + 3}\ dx.$$