

Zad. 1 Niech (X, Σ, μ) będzie przestrzenią miarową. Pokaż, że jeżeli ciąg (A_n) jest zstępujący (tzn. $A_{n+1} \subseteq A_n$ dla każdego n) i $\mu(A_1) < \infty$, to $\mu(\bigcap_n A_n) = \lim \mu(A_n)$. Dlaczego założenie o skończoności miary jest istotne?

Zad. 2 Pokaż, że dla każdego borelowskiego $B \subseteq \mathbb{R}$ i dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór borelowski ograniczony $A \subseteq \mathbb{R}$ taki, że $A \subseteq B$ i $\lambda(B \setminus A) < \varepsilon$.

Zad. 3 Pokaż, że dla każdego borelowskiego $B \subseteq \mathbb{R}$ i dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór zwarty $K \subseteq \mathbb{R}$ taki, że $K \subseteq B$ i $\lambda(B \setminus K) < \varepsilon$.

Zad. 4 Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Udowodnij, że jeśli $\mathcal{A} \subseteq \text{Bor}$ jest taka, że $\sigma(\mathcal{A}) = \text{Bor}$, to następujące warunki są równoważne:

- f jest borelowska,
- $f^{-1}[A]$ jest borelowski dla każdego $A \in \mathcal{A}$.

Wynioskuj, że borelowskość funkcji można badać sprawdzając przeciwobrazy jedynie zbiorów otwartych / przedziałów / półprostych.

Zad. 5 Pokaż, że następujące funkcje są borelowskie. (Uwaga: żeby sprawdzić, że dany przeciwobraz jest borelowski, niekoniecznie trzeba go znaleźć).

$$f(x) = \text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } x > 0, \\ 0, & \text{gdy } x = 0, \\ -1, & \text{gdy } x < 0. \end{cases}$$

$$g(x) = \text{sgn}(\sin(x))$$

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x \leq 0, \\ \sin(\frac{1}{x}), & \text{gdy } x > 0. \end{cases}$$

$$i(x) = \begin{cases} x^2 - e^x & \text{gdy } x \in \mathbb{Q}, \\ \log(|x| + 1)^4 & \text{gdy } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Zad. 6 Niech \mathcal{N} będzie rodziną tych zbiorów, które da się *przykryć* zbiorami borelowskimi miary Lebesgue'a 0, czyli

$$\mathcal{N} = \{A \subseteq \mathbb{R} : \exists B \in \text{Bor}, A \subseteq B, \lambda(B) = 0\}.$$

Niech \mathcal{L} będzie σ -ciałem zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a, tzn. $\mathcal{L} = \sigma(\text{Bor} \cup \mathcal{N})$. Pokaż, że jeśli $L \in \mathcal{L}$, to $L = B \Delta N$ dla pewnych $B \in \text{Bor}$, $N \in \mathcal{N}$.