Analiza i Topologia R **Lista 6** 14 XII 2021

Zad. 1 Niech (A_n) będzie ciągiem podzbiorów $\mathbb{R}$. Powiemy, że A jest granicą dolną (A_n), jeżeli

$$A = \bigcup_n \bigcap_{m>n} A_m.$$

Zbiór A jest natomiast granicą górną (A_n), jeżeli

$$A = \bigcap_n \bigcup_{m>n} A_m.$$

Pokaż, że A jest granicą dolną (A_n) wtedy i tylko wtedy, gdy A składa się ze wszystkich punktów, które należą do prawie wszystkich A_n (poza skończoną liczbą). Sformułuj podobną charakteryzację granicy górnej. Podaj przykład ciągu, dla którego granica dolna i górna są różne.

Zad. 2 Pokaż, że przekrój dowolnie wielu σ-algebr na zbiorze X też jest σ-algebrą na X. Wywnioskuj, że dla każdej rodziny $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ istnieje najmniejsza σ-algebra zawierająca $\mathcal{A}$ (a więc, że $\sigma(\mathcal{A})$ jest dobrze zdefiniowany).

Zad. 3 Wyznacz σ-algebry na $\mathbb{R}$ generowane przez następujące rodziny zbiorów:

- $\{\{1\}, \{2, \pi\}\}$,
- $\{\{x\} \colon x \in \mathbb{R}\}$,
- $\{A \colon |A| < \aleph_0\}$,
- $\{A \colon |A| \leq \aleph_0\}$,
- $\{A \colon |A| \geq \aleph_0\}$.

Zad. 4 Udowodnij, że jeżeli Σ jest skończoną σ-algebrą podzbiorów X, to $|\Sigma| = 2^n$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$.

Zad. 5 Pokaż, że funkcja $\mu \colon \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \{0, 1\}$ dana wzorem

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } A \text{ jest przeliczalny} \\ 1, & \text{gdy } A \text{ jest nieprzeliczalny.} \end{cases}$$

nie jest miarą.

Zad. 6 Niech (X, Σ, μ) będzie przestrzenią miarową. Pokaż, że jeśli A, $B, C \in \Sigma$, to

- $\mu(A) \leq \mu(B)$, o ile $A \subseteq B$,
- $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$,
- $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$,
- $\mu(A \cup B \cup C) = \mu(A \cup B \cup C) - \mu(A \cap B) - \mu(B \cap C) - \mu(A \cap C) + \mu(A \cap B \cap C)$.

Zad. 7 Pokaż, że poniższe rodziny generują σ-algebrę zbiorów borelowskich:

a) rodzina podzbiorów otwartych $\mathbb{R}$,

b) rodzina przedziałów domkniętych,

c) rodzina otwartych przedziałów o końcach wymiernych,

d) rodzina zbiorów postaci (a, ∞) dla $a \in \mathbb{R}$,

e) rodzina zbiorów postaci $[-\infty, q]$ dla $q \in \mathbb{R}$.

Wskazówka: najpierw zauważ, że każdy z powyższych zbiorów jest borelowski, a więc σ-ciała generowane przez te rodziny nie są większe od rodziny zbiorów borelowskich. Następnie pokaż, że za pomocą elementów każdej z powyższych rodzin da się zapisać (używając $\bigcup$, $\bigcap$, $\setminus$ i dopełnień) dowolny przedział otwarty.