Analiza i Topologia R   Lista 5   7 XII 2021

Zad. 1 Korzystając z tw. aproksymacyjnego Weierstrassa udowodnij, że $C[0,1]$ jest przestrzenią ośrodkową.

Zad. 2 Które z poniższych podzbiorów $C[0,1]$ są wypukłe?

- $\{f\colon f(1) < 5\}$,
- $\{f\colon f$ jest różniczkowalna$\}$,
- $\{f\colon f$ nie jest różniczkowalna$\}$.

Zad. 3 Pokaż, że jeżeli w przestrzeni unormowanej X każdy szereg zbieżny bezwzględnie jest zbieżny, to X jest przestrzenią Banacha. (Wskazówka: ustalmy ciąg Cauchy'ego (x_n) w X. Używając założenia znajdziemy jego granicę. Można założyć, przechodząc być może do podciągu (x_n), że dla każdego $n < m$ mamy $||x_m - x_n|| < 1/2^n$ (dlaczego?). Niech $a_0 = x_0$ i $a_{n+1} = x_{n+1} - x_n$ dla każdego n. Udowodnij, że szereg $\sum a_n$ jest bezwzględnie zbieżny. Zastosuj założenie.)

Zad. 4 Powiemy, że $x \in A$ jest wierzchołkiem (punktem ekstremalnym) zbioru wypukłego A, jeżeli dla każdego $y, z \in A$, jeżeli $x = \lambda y + (1-\lambda)z$, to $\lambda = 0$ lub $\lambda = 1$.

- Znajdź wierzchołki kwadratu $[0,1] \times [0,1]$ w $\mathbb{R}$.
- Znajdź choć jeden wierzchołek zbioru $\{x \in \ell_\infty\colon ||x||_\infty \leq 1\}$ w ℓ_∞.
- Pokaż, że zbiór $\{x \in \ell_\infty\colon ||x||_\infty \leq 1$ i x jest zbieżny do $0\}$ nie ma wierzchołków.

Zad. 5 Pokaż, że na $C[0,1]$ nie da się określić iloczynu skalarnego zgodnego z normą supremum tzn. takiego $\langle \cdot, \cdot \rangle$, że $||f||_{\sup} = \sqrt{\langle f, f\rangle}$ dla każdego $f \in C[0,1]$. (Wskazówka: użyj równości równoległoboku). Wywnioskuj, że przestrzeń $C[0,1]$ z metryka supremum nie jest przestrzenią unitarną.

Zad. 6 Oblicz $\langle f, g\rangle$ w $C[0,1]$ z normą $||\cdot||_2$, gdzie

a) $f(x) = x$, $g(x) = x^2$,

b) $f(x) = e^x$, $g(x) = x$.

Zad. 7 Oblicz kąt między ciągami $(\frac{1}{2^n})$ i $(\frac{1}{3^n})$ w ℓ_2. (Wskazówka: w jaki sposób kąt jest związany z iloczynem skalarnym w przestrzeniach euklidesowych?)

Zad. 8 Odwołując się do przestrzeni euklidesowych, zdefiniuj, co to jest rzut wektora x na prostą $\{a \cdot y\colon a \in \mathbb{R}\}$ rozpinaną przez wektor y w przestrzeni unitarnej. Znajdź rzut funkcji $f(x) = x^2$ na prostą rozpinaną przez $g(x) = \sin x$ w przestrzeni $C[-\pi, \pi]$.