Analiza i Topologia R Lista 4 22 XI 2021

Zad. 1 Załóżmy, że X jest przestrzenią zupełną, a (F_n) jest ciągiem podzbiorów domkniętych X takich, że

- $F_{n+1} \subseteq F_n$ dla każdego n oraz
- $\lim_n \operatorname{diam}(F_n) = 0$.

($\operatorname{diam}(A) = \sup\{d(x,y) \colon x, y \in A\}$) Udowodnij, że $\bigcap F_n \neq \emptyset$.
Pokaż, że założenie zupełności jest konieczne. Pokaż, że założenie o średnicach jest konieczne. Pokaż, że $\bigcap F_n$ jest jednopunktowe. Czy to twierdzenie jest prawdziwe również dla przestrzeni metryzowalnych w sposób zupełny?

Zad. 2 Udowodnij, że jeśli ciąg Cauchy'ego ma podciąg zbieżny, to sam jest zbieżny.

Zad. 3 Udowodnij, że w przestrzeni zupełnej przekrój przeliczalnie wielu gęstych zbiorów otwartych jest gęsty. (Wskazówka: użyj twierdzenia Baire'a.)

Zad. 4 Pokaż, że każdy zbiór otwarty jest typu G_δ i F_σ zarazem. Podaj przykład zbioru typu F_σ, który nie jest domknięty. Podaj przykład zbioru G_δ, który nie jest F_σ.

Zad. 5 Niech

$$\ell_1 = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \colon \sum_n |x(n)| < \infty\}.$$

Upewnij się, że metryka dana wzorem

$$d(x,y) = \sum_n |x(n) - y(n)|$$

jest metryką na ℓ_1. Pokaż, że ℓ_1 z tą metryką jest przestrzenią zupełną.