Analiza i Topologia R Lista 3 9 2021

Zad. 1 Kiedy przekształcenie liniowe $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jest funkcją ciągłą? Kiedy jest homeomorfizmem? Chodzi o podanie charakteryzacji w języku macierzy.

Zad. 2 Pokaż, że $\mathbb{R}$ jest homeomorficzny z przestrzenią $\{f \in C[0,1]\colon f \text{ jest stała}\}$ z metryką supremum. Czy w $C[0,1]$ znajdziemy podprzestrzeń homeomorficzną z $\mathbb{R}^2$?

Zad. 3 Zbadaj, które litery alfabetu są ze sobą homeomorficzne. (Rozważaj możliwe proste kroje i skoncentruj się na trudniejszych przypadkach.)

Zad. 4 Czy istnieje funkcja ciągła z okręgu na odcinek domknięty? A z odcinka domkniętego na okrąg?

Zad. 5 Niech C będzie zbiorem Cantora. Pokaż, że C jest homeomorficzny z $C \times C$ (wskazówka: użyj faktu, że C jest homeomorficzny z $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$). Wywnioskuj, że zbiór Cantora zawiera $\mathfrak{c}$ rozłącznych podprzestrzeni homeomorficznych ze zbiorem Cantora.

Zad. 6 Załóżmy, że przestrzeń X ma własność: dla każdego $x \neq y \in X$ istnieje funkcja $f\colon [0,1] \to X$ taka, że $f(0) = x$, $f(1) = y$ i f jest homeomorfizmem na swój obraz. Pokaż, że wtedy przestrzeń X jest spójna.