Analiza i Topologia R Lista 2 25 X 2021

Zad. 1 Zbadaj wnętrze, domknięcie i brzeg zbioru A w metryce euklidesowej, centrum i dyskretnej:

- $A = [2,3) \times \{1\}$,
- $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.
- $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{R}$.

Zad. 2 Zbadaj wnętrza, domknięcia i brzegi zbioru A w przestrzeni $C[0,1]$ (z metryką supremum), jeśli

- A to zbiór funkcji stałych,
- $A = \{f \colon f(x) < 2\}$.

Zad. 3 Niech A będzie zwartym podzbiorem $\mathbb{R}$. Pokaż, że A ma wtedy najmniejszy i największy element.

Zad. 4 Niech A będzie zwartym podzbiorem $\mathbb{R}$ i niech $f \colon A \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Pokaż, że f jest ograniczona i przyjmuje swoje kresy.

Zad. 5 Pokaż, że jeżeli X jest zwarta i $F \subseteq X$ jest domknięty, to F jest zwarty.

Zad. 6 Jak wyglądają kule i zbiory otwarte w przestrzeni $[0,1) \cup [2,3]$ z metryką euklidesową? Jak wyglądają kule i zbiory otwarte w $\mathbb{N}$ z metryką euklidesową?

Zad. 7 Udowodnij, że przestrzeń $\mathbb{R}^2$ z metryką centrum jest spójna.

Zad. 8 Rozważmy $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ jako podprzestrzeń $[0,1]^{\mathbb{N}}$ z metryką

$$d((x_n),(y_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}|x_n - y_n|.$$

Pokaż, że kule w tej przestrzeni wyglądają tak, jak kule w przestrzeni $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ze *standardową* metryką.

Zad. 9 Znajdź element zbioru Cantora, który nie jest końcem wyrzucanego przedziału. Uzasadnij, że zbiór Cantora ma $\mathfrak{c}$ elementów.