Analiza i Topologia R **Lista 10** 24 I 2022

Zad. 1 Rozważmy przestrzeń probabilityczną $(\mathbb{R}, \mathrm{Bor}, \mu)$

- Pokaż, że dystrybuanta F_μ miary μ jest prawostronnie ciągła (było na wykładzie, ale nie zaszkodzi sobie powtórzyć).
- Pokaż, że dystrybuanta F_μ miary μ nie jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $x \in X$ taki, że $\mu(\{x\}) > 0$.

Zad. 2 Oblicz

$$\int \cos x \; d\mu,$$

gdzie μ jest miarą o dystrybuancie $F(x) = \mathrm{arctg} x + \pi/2$.

Zad. 3 Rozważmy przestrzeń miarową (X, Σ, μ) i funkcję borelowską $f \colon X \to \mathbb{R}$. Udowodnij, że funkcja ν dana wzorem

$$\nu(B) = \mu(f^{-1}[B])$$

jest miarą określoną na zbiorach borelowskich.
Wykaż, że

$$\int_X f \; d\mu = \int_{\mathbb{R}} x \; d\nu.$$

Zad. 4 Niech (X, Σ, μ) będzie przestrzenią probabilistyczną i niech (f_n) będzie ciągiem funkcji borelowskich a $f \colon X \to \mathbb{R}$ funkcją borelowską.

a) Załóżmy, że (f_n) jest zbieżny f niemal jednostajnie. Czy jest zbieżny prawie wszędzie?

b) Zbadaj relację między zbieżnością jednostajną a zbieżnością całkową (tzn. $\int f_n \; d\mu \to \int f \; d\mu$).

c) Zbadaj relację między zbieżnością punktową a zbieżnością całkową.