Analiza i Topologia R Lista 1 18 X 2021

Zad. 1 Wybierz losowo dwie metryki nieeuklidesowe zdefiniowane na wykładzie i sprawdź, że spełniają warunek trójkąta.

Zad. 2 Zdefiniuj metrykę (niedyskretną) na zbiorze $C(\mathbb{R})$ funkcji ciągłych na $\mathbb{R}$.

Zad. 3 Pokaż, że ciąg (x_n) w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^k$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy każdy z ciągów $x_n(i)$ dla $i < k$ jest zbieżny.

Zad. 4 Udowodnij, że ciąg (x_n) punktów płaszczyzny jest zbieżny do x w metryce euklidesowej wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbieżny w metryce maksimum.

Zad. 5 Czy potrafisz znaleźć ciąg, który jest zbieżny w metryce centrum, ale nie jest zbieżny w metryce euklidesowej? Po skonstatowaniu, że nie potrafisz, zastanów się, dlaczego.

Zad. 6 Wykaż, że zbieżność jednostajna (patrz Analiza x) jest równoważna zbieżności w metryce supremum.

Zad. 7 Zdefiniuj podzbiór $\mathbb{R}^5$, który nie jest ani otwarty ani domknięty.

Zad. 8 Wykaż, że podzbiory $\mathbb{R}^n$ postaci $(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ są otwarte, a $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ są domknięte.

Zad. 9 Pokaż, że dla każdego $A \subseteq X$ mamy

$$\overline{A} = (\mathrm{Int}(A^c))^c.$$

Zad. 10 Wykaż, że $\mathrm{Int}(A)$ jest największym zbiorem otwartym zawartym w A. Wysnuj wniosek, że $\overline{A}$ jest najmniejszym zbiorem domkniętym zawierającym A.

Zad. 11 Niech $A \subseteq C[0,1]$ będzie zbiorem funkcji (ściśle) rosnących. Uzasadnij ze szczegółami, że $\mathrm{Int}(A) = \emptyset$ a $\overline{A}$ jest zbiorem funkcji niemalejących.

Zad. 12 Opisz, jak wygląda kula o środku w ciągu $(0, 0, 0, \dots)$ i promieniu $1/16$ w przestrzeni $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ z następującą metryką:

$$d(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2^{l(x,y)}}, & \text{gdy } x \neq y \\ 0, & \text{gdy } x = y. \end{cases}$$

gdzie $l(x, y) = \min\{n \colon x(n) \neq y(n)\}$.

Zad. 13 Czy istnieje metryka na $\mathbb{R}^2$ taka, że $[0,1] \times [0,1]$ jest kulą (w tej metryce)?

Zad. 14 Pokaż, że metryka euklidesowa jest w istocie metryką.