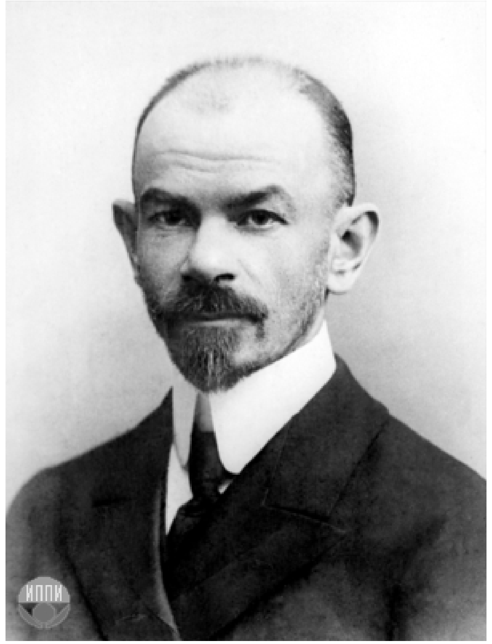
KOLOKWIUM 2

Analiza i Topologia R

1 lutego 2022



Rysunek 1: Kolokwium pilnuje Dymitr Fiedorowicz Jegorow.

Zadanie 1 O zbiorze $A \subseteq \mathbb{R}$ powiemy, że jest *zasadniczo nieograniczony*, jeżeli dla każdego ograniczonego $B \subseteq \mathbb{R}$ mamy $\lambda(A \cap B) < \lambda(A)$. Podaj przykład zbioru $A \subseteq \mathbb{R}$, który jest zasadniczo nieograniczony i taki, że $\lambda(A) = 1$.

Zadanie 2
Podaj przykład zbioru $A \subseteq \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, dla którego

$$\mu(A) = \frac{5}{8}.$$

Tutaj μ jest standardową miarą na $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

Zadanie 3
Rozważmy ciąg funkcji $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dany wzorem

$$f_n(x) = \chi_{[n,n+1]}(x).$$

Czy (f_n) jest zbieżny λ-prawie wszędzie? Czy jest zbieżny wg miary λ? Odpowiedzi uzasadnij.

Zadanie 4 Rozważmy przestrzeń miarową

$$(\mathbb{R}^2, \mathcal{P}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{P}(\mathbb{R}), \delta_2 \otimes \delta_3).$$

Używając tw. Fubiniego oblicz całkę

$$\int x^2 + y^2 \; d(\delta_2 \otimes \delta_3).$$

Zadanie 5
Udowodnij, że rodzina zbiorów $\{[a,\infty) \colon a \in \mathbb{R}\}$ generuje rodzinę zbiorów borelowskich.

Zadanie 6
Oblicz całkę

$$\int x^2 \cdot \chi_{[0,1)} \; d\mu,$$

gdzie μ dana jest wzorem

$$\mu(A) = \int_A x^2 \; d\lambda.$$
