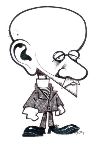
KOLOKWIUM 1

Analiza i Topologia R

29 listopada 2021



Rysunek 1: Kolokwium pilnuje David Hilbert.

Zadanie 1
Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną i niech $x_0 \in X$. Zdefiniujmy funkcję $f\colon X \to \mathbb{R}$ wzorem

$$f(x) = d(x, x_0).$$

Pokaż, że ta funkcja jest ciągła (w $\mathbb{R}$ panuje metryka euklidesowa).

Zadanie 2
Rozważmy przestrzeń $X = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (z metryką euklidesową). Odpowiedz na poniższe pytania podając szczegółowe uzasadnienia:

a) Czy X jest zwarta?

b) Czy X jest zupełna?

c) Czy X jest ośrodkowa?

d) Czy X jest spójna?

Zadanie 3
Powiemy, że zbiór A jest nigdziegęsty, jeżeli jego domknięcie ma wnętrze puste. Pokaż, że zbiór A jest nigdziegęsty wtedy i tylko wtedy, gdy A^c zawiera zbiór otwarty gęsty.

Zadanie 4 Rozważmy przestrzeń $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ z metryką definiowaną analogicznie do metryki na $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Pokaż, że taka przestrzeń nie jest zwarta, ale jest zupełna.

Zadanie 5
Niech $f\colon X \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Pokaż, że jeżeli X jest zwarta, to f jest jednostajnie ciągła, tzn.

$$\forall m\, \exists n\, \forall x, y \in X\; d(x, y) < 1/n \implies |f(x) - f(y)| < 1/m.$$

(Wskazówka: załóż, że f nie jest jednostajnie ciągła i użyj zwartości, by znaleźć pewne dwa interesujące zbieżne ciągi.)

Zadanie 6
Czy podane pary przestrzeni są homeomorficzne? Odpowiedź uzasadnij.

a) $X = (1, 3]$, $Y = [5, \infty)$.

b) $X = \mathbb{R} \times \mathbb{Q}$, $Y = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ze standardową metryką.

c) $X = \mathbb{R} \times \mathbb{Q}$, $Y = (0,1)^{\mathbb{N}}$ z metryką kostki Hilberta.

d) $X = \{\langle x, y\rangle \colon x^2 + y^2 = 1\}$ z metryką centrum, $Y = \mathbb{R}$ z metryką dyskretną