Analiza i Topologia R **Lista 9** 15 XII 2020

Zad. 1 Pokaż, że jeżeli $f = g$ μ-prawie wszędzie, to

$$\int f \, d\mu = \int g \, d\mu.$$

Pokaż, że nie zachodzi odwrotna implikacja.

Zad. 2 Oblicz całkę $\int_{[0,1]} g \, d\lambda$, gdzie

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \text{ dla } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}, \\ \sin(x^2) \text{ dla } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Zad. 3 Pokaż, że jeżeli μ i ν są miarami określonymi na tym samym σ-ciele, to funkcja $\mu + \nu$ również jest miarą. Podobnie, jeśli (μ_n) jest ciągiem miar określonych na jednym σ-ciele, to $\sum_n a_n \mu_n$ jest miarą dla każdego ciągu (a_n) liczb rzeczywistych.

Zad. 4 Udowodnij, że

$$\int f \, d(\mu + \nu) = \int f \, d\mu + \int f \, d\nu.$$

Zad. 5 Udowodnij tzw. nierówność Czebyszewa, tzn.

$$\int_X f \, d\mu \geq \varepsilon \cdot \mu(\{x \in X : f(x) \geq \varepsilon\}).$$

Tutaj (X, Σ, μ) jest przestrzenią miarową, f jest funkcją mierzalną *nieujemną*, a $\varepsilon > 0$.

Zad. 6 Rozważmy $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, gdzie μ jest miarą liczącą. Niech $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ będzie ciągiem. Pokaż, że

$$\int f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

Zad. 7 Rozważmy następującą grę: z przedziału $[0,1]$ losujemy liczbę, a za wylosowanie liczby x otrzymamy $12x^2 - 5$ złotych. (Dla przykładu: za wylosowanie 0 musimy zapłacić 5 złotych, a za wylosowanie 1 otrzymamy 7 złotych.) Czy warto grać w tę grę (pomijając walor poznawczy związany z możliwością otrzymania niewymiernie wielu złotych)? Wskazówka: użyj wartości oczekiwanej.

Zad. 8 Podaj przykład funkcji całkowalnej f, takiej że, jeśli p jest funkcja prostą, $p \leq f$, to p nie jest całkowalna. Dlaczego istnienie takich przykładów powoduje to, że całkę Lebesgue'a definiuje się w czterech krokach, a nie w trzech?