Analiza i Topologia R **Lista 8** 8 XII 2020

Zad. 1 Pokaż, że dla każdego borelowskiego $B \subseteq \mathbb{R}$ i dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór borelowski ograniczony $A \subseteq \mathbb{R}$ taki, że $A \subseteq B$ i $\lambda(B \setminus A) < \varepsilon$.

Zad. 2 Pokaż, że dla każdego borelowskiego $B \subseteq \mathbb{R}$ i dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór zwarty $K \subseteq \mathbb{R}$ taki, że $K \subseteq B$ i $\lambda(B \setminus A) < \varepsilon$.

Zad. 3 Niech $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Udowodnij, że jeśli $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{Bor}$ jest taka, że $\sigma(\mathcal{A}) = \mathrm{Bor}$, to następujące warunki są równoważne:

- f jest borelowska,
- $f^{-1}[A]$ jest borelowski dla każdego $A \in \mathcal{A}$.

Wywnioskuj, że borelowskość funkcji można badać sprawdzając przeciwobrazy jedynie zbiorów otwartych / przedziałów / półprostych.

Zad. 4 Pokaż, że następujące funkcje są borelowskie. (Uwaga: żeby sprawdzić, że dany przeciwobraz jest borelowski, niekoniecznie trzeba go znaleźć).

$$f(x) = \mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1, \text{ gdy } x > 0, \\ 0, \text{ gdy } x = 0, \\ -1, \text{ gdy } x < 0. \end{cases}$$

$$g(x) = \mathrm{sgn}(\sin(x))$$

$$h(x) = \begin{cases} 0, \text{ gdy } x \leq 0, \\ \sin(\frac{1}{x}), \text{ gdy } x > 0. \end{cases}$$

$$i(x) = \begin{cases} x^2 - e^x \text{ gdy } x \in \mathbb{Q}, \\ \log(|x|+1)^4 \text{ gdy } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Zad. 5 Załóżmy, że $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ są funkcjami prostymi.

- Pokaż, że istnieje N, zbiory parami rozłączne $(A_n)_{n<N}$ i liczby rzeczywiste $(a_n)_{n<N}$ takie, że
$$f(x) = \sum_{n<N} a_n \chi_{A_n}.$$
- Pokaż, że istnieje N, ciąg wstępujący zbiorów $(A_n)_{n<N}$ i liczby rzeczywiste $(a_n)_{n<N}$ takie, że
$$f(x) = \sum_{n<N} a_n \chi_{A_n}.$$

- Pokaż, że istnieje N, ciąg $(A_n)_{n<N}$ oraz ciągi $(a_n)_{n<N}$, $(b_n)_{n<N}$ takie, że

$$f(x) = \sum_{n<N} a_n \chi_{A_n},$$

$$g(x) = \sum_{n<N} b_n \chi_{A_n}.$$

Zad. 6 Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie zdefiniowana przez $f(x) = \inf_n f_n(x)$, gdzie (f_n) jest pewnym ciągiem funkcji borelowskich. Pokaż, że f jest borelowska.

Zad. 7 Załóżmy, że $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ są borelowskie. Pokaż, że funkcje $\max(f, g)$, $|f|$, $f + g$ też są borelowskie.

Zad. 8 Niech $\mathbb{N}$ będzie rodziną tych zbiorów, które da się *przykryć* zbiorami borelowskimi miary Lebesgue'a 0, czyli

$$\mathcal{N} = \{A \subseteq \mathbb{R} \colon \exists B \in \mathrm{Bor}, A \subseteq B, \lambda(B) = 0\}.$$

Niech $\mathcal{L}$ będzie σ-ciałem zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a, tzn. $\mathcal{L} = \sigma(\mathrm{Bor} \cup \mathcal{N})$. Pokaż, że jeśli $L \in \mathcal{L}$, to $L = B \triangle N$ dla pewnych $B \in \mathrm{Bor}$, $N \in \mathcal{N}$.