Analiza i Topologia R   Lista 6   24 XI 2020

Zad. 1 Pokaż, że na $C[0,1]$ nie da się określić iloczynu skalarnego zgodnego z normą supremum tzn. takiego $\langle \cdot, \cdot \rangle$, że $||f||_{\text{sup}} = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ dla każdego $f \in C[0,1]$. (Wskazówka: użyj równości równoległoboku). Wywnioskuj, że przestrzeń $C[0,1]$ z metryka supremum nie jest przestrzenią unitarną.

Zad. 2 Pokaż, że dla wektorów x, y w przestrzeni unitarnej X następujące warunki są równoważne:

a) $x \perp y$,

b) $||x + \lambda y|| = ||x - \lambda y||$ dla każdego $\lambda \in \mathbb{R}$,

c) $||x + \lambda y|| \geq ||x||$ dla każdego $\lambda \in \mathbb{R}$.

Zad. 3 Pokaż, że jeżeli $(X, ||\cdot||)$ jest przestrzenią Hilberta, $\{x_k \colon k \in \mathbb{N}\}$ jest układem ortonormalnym, to $\sum_{k \in \mathbb{N}} \langle x, x_k \rangle x_k$ jest zbieżny dla każdego $x \in X$.

Zad. 4 Oblicz $\langle f, g \rangle$ w $C[0,1]$ z normą $||\cdot||_2$, gdzie

a) $f(x) = x$, $g(x) = x^2$,

b) $f(x) = e^x$, $g(x) = x$.

Zad. 5 Oblicz kąt między ciągami $(\frac{1}{2^n})$ i $(\frac{1}{3^n})$ w ℓ_2. (Wskazówka: w jaki sposób kąt jest związany z iloczynem skalarnym w przestrzeniach euklidesowych?)

Zad. 6 Odwołując się do przestrzeni euklidesowych, zdefiniuj, co to jest rzut wektora x na prostą $\{a \cdot y \colon a \in \mathbb{R}\}$ rozpinaną przez wektor y w przestrzeni unitarnej. Znajdź rzut funkcji $f(x) = x^2$ na prostą rozpinaną przez $g(x) = \sin x$ w przestrzeni $C[-\pi, \pi]$.

Zad. 7 Kiedy podprzestrzeń przestrzeni unormowanej ma puste wnętrze?

Zad. 8 Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Dla $x \neq y \in X$ powiemy, że S jest symetralną x i y, jeżeli $S = \{z \in X \colon d(x,z) = d(y,z)\}$. Narysuj symetralne wybranych punktów w różnych przestrzeniach metrycznych. Udowodnij, że jeżeli X jest przestrzenią unitarną, to symetralne mają puste wnętrze.