Analiza i Topologia R **Lista 5** 10 XI 2020

Zad. 1 Pokaż, że jeżeli (f_n) jest ciągiem z $C[0,1]$ i $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ jest takie, że g jest granicą (f_n) w sensie normy supremum, to $g \in C[0,1]$.

Zad. 2 Które z poniższych podzbiorów $C[0,1]$ są wypukłe?

- $\{f\colon f(1) < 5\}$,
- $\{f\colon f$ jest różniczkowalna$\}$,
- $\{f\colon f$ nie jest różniczkowalna$\}$.

Zad. 3 Udowodnij, że przestrzeń ℓ_1 jest zupełna. (Na wykładzie rozważyliśmy ciąg Cauchy'ego (x_n) w ℓ_1 i znaleźliśmy kandydata na granicę x. Udowodniliśmy, że $\lim_n ||x_n - x||_1 = 0$. Pozostało pokazać, że $x \in \ell_1$.

Zad. 4 Pokaż, że ℓ_1 jest ośrodkowa, a ℓ_∞ nie jest.

Zad. 5 Napisz formalny dowód, że przykład ciągu w $C_1[0,1]$ (czyli $C[0,1]$ z metryką całkową), który jest Cauchy'ego, lecz nie jest zbieżny (podany na wykładzie) w istocie jest poprawny.

Zad. 6 Pokaż, że jeżeli w przestrzeni unormowanej X każdy szereg zbieżny bezwzględnie jest zbieżny, to X jest przestrzenią Banacha. (Wskazówka: ustalmy ciąg Cauchy'ego (x_n) w X. Używając założenia znajdziemy jego granicę. Można założyć, przechodząc być może do podciągu (x_n), że dla każdego $n < m$ mamy $||x_m - x_n|| < 1/2^n$ (dlaczego?). Niech $a_0 = x_0$ i $a_{n+1} = x_{n+1} - x_n$ dla każdego n. Udowodnij, że szereg $\sum a_n$ jest bezwzględnie zbieżny. Zastosuj założenie.)

Zad. 7 Powiemy, że $x \in A$ jest wierzchołkiem (punktem ekstremalnym) zbioru wypukłego A, jeżeli dla każdego $y, z \in A$, jeżeli $x = \lambda y + (1-\lambda)z$, to $\lambda = 0$ lub $\lambda = 1$.

- Znajdź wierzchołki kwadratu $[0,1] \times [0,1]$ w $\mathbb{R}$.
- Znajdź choć jeden wierzchołek zbioru $\{x \in \ell_\infty\colon ||x||_\infty \leq 1\}$ w ℓ_∞.
- Pokaż, że zbiór $\{x \in \ell_\infty\colon ||x||_\infty \leq 1$ i x jest zbieżny do $0\}$ nie ma wierzchołków.