Analiza i Topologia R **Lista 4** 3 XI 2020

Zad. 1 Powiemy, że przestrzeń X jest metryzowalna w sposób zupełny, jeżeli istnieje przestrzeń zupełna Y taka, że X jest homeomorficzny z Y. Pokaż, że twierdzenie Baire'a zachodzi dla przestrzeni, które niekoniecznie są zupełne, ale są metryzowalne w sposób zupełny. Pokaż, że $\mathbb{Q}$ (z metryką euklidesową) nie jest metryzowalne w sposób zupełny.

Zad. 2 Posługując się twierdzeniem aproksymacyjnym Weierstrassa pokaż, że $C[0,1]$ jest ośrodkowa.

Zad. 3 Pokaż, że zbiór funkcji kawałkami liniowych jest gęsty w $C[0,1]$.

Zad. 4 Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną. Zdefiniujmy metrykę d' na X wzorem

$$d'(x,y) = \min\{d(x,y), 1\}.$$

Pokaż, że (X,d) jest homeomorficzna z (X,d').

Zad. 5 Udowodnij, że każda przestrzeń zwarta da się zanurzyć w $[0,1]^{\mathbb{N}}$ (tzn. dla każdej przestrzeni ośrodkowej X istnieje Y, będąca podprzestrzenią $[0,1]^{\mathbb{N}}$, taka, że X i Y są homeomorficzne). W tym celu

- przypomnij sobie, że każda przestrzeń zwarta jest ośrodkowa i ustal zbiór gęsty $\{x_n \in n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$ i zdefiniuj funkcję $f\colon X \to [0,1]^{\mathbb{N}}$ wzorem

  $$f(x) = (d(x,x_0), d(x,x_1), \dots),$$

  zakładając, że $\mathrm{diam}(X) \leq 1$ (patrz zadanie 4).

- skonstatuj, że f jest różnowartościowa,

- pokaż, że f jest ciągła (wskazówka: chyba najłatwiej użyć definicji Cauchy'ego),

- skorzystaj z odpowiedniego twierdzenia, żeby zakończyć dowód.