Analiza i Topologia R **Lista 3** 27 X 2020

Zad. 1 Pokaż, że jeżeli $f\colon X \to Y$ jest ciągłą surjekcją i X jest ośrodkowa, to również Y jest ośrodkowa. Wywnioskuj stąd, że ośrodkowość jest niezmiennikiem homeomorfizmu.

Zad. 2 Pokaż, że jeżeli $f\colon X \to Y$ jest homeomorfizmem i $a \in X$, to obcięcie f' funkcji f do zbioru $X \setminus \{a\}$ jest homeomorfizmem między $X \setminus \{a\}$ i $Y \setminus \{f(a)\}$. Wywnioskuj, że jeżeli przestrzeń X ma punkt rozspajający ją na 7 *kawałków*, to również Y musi mieć taki punkt.

Zad. 3 Powiemy, że przestrzeń X jest metryzowalna w sposób zupełny, jeżeli istnieje przestrzeń zupełna Y taka, że X jest homeomorficzny z Y. Sprawdź, czy twierdzenie Cantora zachodzi dla przestrzeni, które niekoniecznie są zupełne, ale są metryzowalne w sposób zupełny.

Zad. 4 Czy istnieje metryka d na zbiorze $\mathbb{R}$ taka, że $(\mathbb{R}, d)$ jest przestrzenią zwartą? (Wskazówka: to zadanie jest w jakimś sensie podobne np. do takiego: czy istnieje działanie $\circ$ na zbiorze $A = \{0, \ldots, 9\}$ takie, że $(A, \circ)$ jest grupą nieabelową).

Zad. 5 Kiedy przekształcenie liniowe $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jest funkcją ciągłą? Kiedy jest homeomorfizmem? Chodzi o podanie charakteryzacji w języku macierzy.

Zad. 6 Pokaż, że $\mathbb{R}$ jest homeomorficzny z przestrzenią $\{f \in C[0,1]\colon f \text{ jest stała}\}$ z metryką supremum. Czy w $C[0,1]$ znajdziemy podprzestrzeń homeomorficzną z $\mathbb{R}^2$?

Zad. 7 Podaj przykład funkcji ciągłej $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (w metryce euklidesowej) i zbioru otwartego $U \subseteq \mathbb{R}$ takiego, że jego obraz $f[U]$ nie jest otwarty.

Zad. 8 Niech $h\colon (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ będzie homeomorfizmem. Niech $A \subseteq X$. Sprawdź, czy

- $\overline{h(A)} = h(\overline{A})$,
- $\mathrm{Int}(h(A)) = h(\mathrm{Int}(A))$,

Zad. 9 Zbadaj, które litery alfabetu są ze sobą homeomorficzne. (Rozważaj możliwe proste kroje i skoncentruj się na trudniejszych przypadkach.)

Zad. 10 Czy istnieje funkcja ciągła z okręgu na odcinek domknięty? A z odcinka domkniętego na okrąg?

Zad. 11 Niech C będzie zbiorem Cantora. Pokaż, że C jest homeomorficzny z $C \times C$ (wskazówka: użyj faktu, że C jest homeomorficzny z $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$). Wywnioskuj, że zbiór Cantora zawiera $\mathfrak{c}$ rozłącznych podprzestrzeni homeomorficznych ze zbiorem Cantora.

Zad. 12 Załóżmy, że przestrzeń X ma własność: dla każdego $x \neq y \in X$ istnieje funkcja $f\colon [0,1] \to X$ taka, że $f(0) = x$, $f(1) = y$ i f jest homeomorfizmem na swój obraz. Pokaż, że wtedy przestrzeń X jest spójna.