Analiza i Topologia R   Lista 2   20 X 2020

Zad. 1 Naszkicuj w układzie współrzędnych zbiór

$$A = \{\langle x, y\rangle \colon 1 < x < 2 \land 0 \leq y \leq 3\} \cup ([2,3] \times \{0\}) \cup ([2,3] \times \{3\}).$$

Zbadaj wnętrze, domknięcie i brzeg zbioru A w metryce euklidesowej, miejskiej, centrum i dyskretnej.

Zad. 2 Pokaż, że $\mathrm{Int}(A)$ jest największym zbiorem otwartym zawartym w A, a $\overline{A}$ jest najmniejszym zbiorem domkniętym zawierającym A.

Zad. 3 Czy zawsze

- $\mathrm{Int}(\overline{A}) = \mathrm{Int}(A)$?
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$?
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$?

Zad. 4 Zbadaj wnętrza, domknięcia i brzegi zbioru A w przestrzeni $C[0,1]$ (z metryką supremum), jeśli

- A to zbiór funkcji stałych,
- $A = \{f \colon f(x) < 2\}$,
- A to zbiór funkcji ściśle rosnących,
- A to zbiór funkcji o pochodnej nieprzekraczającej 2.

Zad. 5 Niech A będzie zwartym podzbiorem $\mathbb{R}$. Pokaż, że A ma wtedy najmniejszy i największy element.

Zad. 6 Niech A będzie zwartym podzbiorem $\mathbb{R}$ i niech $f \colon A \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Pokaż, że f jest ograniczona i przyjmuje swoje kresy.

Zad. 7 Pokaż, że jeżeli X jest zwarta i $F \subseteq X$ jest domknięty, to F jest zwarty.

Zad. 8 Czy przestrzeń $C[0,1]$ z metryką supremum jest zwarta?

Zad. 9 Jak wyglądają kule i zbiory otwarte w przestrzeni $[0,1) \cup [2,3]$ z metryką euklidesową? Jak wyglądają kule i zbiory otwarte w $\mathbb{N}$ z metryką euklidesową?

Zad. 10 Zbadaj, które z przestrzeni $(\mathbb{R}^2, d)$ (gdzie d jest metryką d_1, maksimum, dyskretną, centrum) są zwarte, zupełne, ośrodkowe, spójne.

Zad. 11 Rozważmy $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ jako podprzestrzeń $[0,1]^{\mathbb{N}}$ z metryką

$$d((x_n), (y_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |x_n - y_n|.$$

Pokaż, że kule w tej przestrzeni wyglądają tak, jak kule w przestrzeni $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ze *standardową* metryką.