Analiza i Topologia R **Lista 10** 12 I 2021

Zad. 1 Udowodnij lemat Fatou:

$$\liminf_n \int f_n \, d\mu \leq \int \liminf_n f_n \, d\mu.$$

Wskazówka: niech $g_n = \inf_{k \geq n} f_k$ i użyj twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej.

Zad. 2 Podaj przykład ciągu (f_n), świadczącego o tym, że w lemacie Fatou nie można napisać równości.

Zad. 3 Oblicz

$$\lim_{n\to\infty} \int \frac{n \sin(x/n)}{x(x^2+1)} \, dx.$$

Wskazówka: zbadaj granicę punktową ciągu pod całką. Użyj któregoś z twierdzeń granicznych.

Zad. 4 Oblicz

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{n^2 x + 2}{n^2 x + n + 3} \, dx.$$

Zad. 5 Narysuj diagram implikacji typów zbieżności omawianych na wykładzie, dla przestrzeni probabilistycznej. Upewnij się, że znasz wszystkich świadków na brak implikacji.

Zad. 6 Niech (X, Σ, μ) będzie przestrzenią miarową. Powiemy, że własność $(\star)$ zachodzi **niemal** wszędzie, jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ znajdziemy zbiór $B \in \Sigma$ taki, że $(\star)$ zachodzi poza zbiorem B. Wykaż, że f_n jest zbieżny niemal wszędzie do f wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbieżny prawie wszędzie do f.

Zad. 7 Niech ν będzie miarą określoną na rodzinie zbiorów borelowskich zdefiniowaną przez

$$\nu(A) = \int_A x^2 \, d\lambda,$$

gdzie λ jest miarą Lebesgue'a. Oblicz

$$\int_{[0,1]} \sin x \, d\nu.$$

Zad. 8 Załóżmy, że μ i ν są miara określonymi na tej samej σ-algebrze i że $\nu \ll \mu$ oraz $\mu \ll \nu$. Znajdź związek między $\frac{d\mu}{d\nu}$ a $\frac{d\nu}{d\mu}$.

Zad. 9 Pokaż, że jeżeli $\int |f_n - f| \, d\mu$ zbiega do 0, to (f_n) dąży do f względem miary.