Analiza i Topologia R Lista 1 13 X 2020

Zad. 1 Wybierz losowo dwie metryki nieeuklidesowe zdefiniowane na wykładzie i sprawdź, że spełniają warunek trójkąta.

Zad. 2 Narysuj kulę (o dowolnym środku i promieniu) na płaszczyźnie z metryką maksimum.

Zad. 3 Opisz, jak wygląda kula o środku w ciągu $(0, 0, 0, \dots)$ i promieniu $1/13$ w przestrzeni $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ z metryką zdefiniowaną na wykładzie.

Zad. 4 Pokaż, że ciąg (x_n) w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^k$ jest zbieżny, jeśli każdy z ciągów $x_n(i)$ dla $i < k$ jest zbieżny.

Zad. 5 Udowodnij, że ciąg (x_n) punktów płaszczyzny jest zbieżny do x w metryce euklidesowej wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbieżny w metryce maksimum.

Zad. 6 Czy potrafisz znaleźć ciąg, który jest zbieżny w metryce centrum, ale nie jest zbieżny w metryce euklidesowej? Po skonstatowaniu, że nie potrafisz, zastanów się, dlaczego.

Zad. 7 Wykaż, że zbieżność jednostajna jest równoważna zbieżności w metryce supremum.

Zad. 8 Zdefiniuj podzbiór $\mathbb{R}^5$, który nie jest ani otwarty ani domknięty.

Zad. 9 Wykaż, że podzbiory $\mathbb{R}^n$ postaci $(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ są otwarte, a $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ są domknięte.

Zad. 10 Pokaż, że $[0, 1]$ w metryce euklidesowej jest zwarty. Pokaż, że w metryce dyskretnej bynajmniej zwarty nie jest.

Zad. 11 Pokaż, że dla każdego $A \subseteq X$ mamy

$$\overline{A} = (\mathrm{Int}(A^c))^c.$$

Zad. 12 Czy istnieje metryka na $\mathbb{R}^2$ taka, że $[0, 1] \times [0, 1]$ jest kulą (w tej metryce)?

Zad. 13 Pokaż, że metryka euklidesowa jest w istocie metryką.