

KOLOKWIUM 2

Analiza i Topologia R

26 stycznia 2021

Zadanie 1

Podaj przykład zbioru $A \subseteq \mathbb{R}$ o pustym wnętrzu takiego, że $\lambda(A) > 2$.

Wykaż, że istnieje zbiór domknięty $F \subseteq \mathbb{R}$ o pustym wnętrzu i taki, że $\lambda(F) > 2$. (Uwaga: nie trzeba go wskazywać, choć można).

Zadanie 2

Podaj przykład funkcji prostej p takiej, że $p \leq f$ λ -prawie wszędzie i

$$\int p d\lambda > \int_{[0,1]} f d\lambda - 1/4,$$

gdzie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dana jest wzorem $f(x) = |x|$.

Zadanie 3

O ciągu (f_n) funkcji rzeczywistych nieujemnych wiemy, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = 0.$$

Czy z tego wynika, że (f_n) jest zbieżny według μ ?



Rysunek 1: Kolokwium pilnuje sam Henri Lebesgue.

Zadanie 4 Dawid i Natalia losują liczby rzeczywiste z przedziału $[0, 1]$. Miara związana z losowaniem Natalii to

$$\mu(A) = \int_A 2\chi_{[0,1/2]} d\lambda,$$

a ta związana z losowaniem Dawida to

$$\nu(A) = \int_A 3x^2 d\lambda.$$

Oblicz prawdopodobieństwo, że Natalia wylosowała liczbę bliżej środka przedziału niż Dawid.

Zadanie 5

Udowodnij, że zbiór $[0, 1) \cup \{3\}$ jest borelowski.

Zadanie 6

Wskaż przykład miary probabilistycznej na \mathbb{R} , której dystrybuanta jest funkcją ściśle rosnącą.