# 1 Twierdzenie Baire'a

## 1.1 Wiadomości wstępne

Przed przystąpieniem do tytułowego twierdzenia, wprowadźmy narzędzia, które będą niezbędne do jego udowodnienia.

**Definicja 1.1.** Przestrzeń metryczną $(X, d)$ nazywamy *zupełną*, jeżeli każdy ciąg elementów z przestrzeni $X$ spełniający warunek Cauchy'ego jest zbieżny.

**Definicja 1.2.** Przestrzeń topologiczną $(X, \tau)$ nazywamy *metryzowalną w sposób zupełny*, jeżeli istnieje metryka $d$ taka, że $\tau$ jest topologią na $(X, d)$ oraz $(X, d)$ jest przestrzenią zupełną.

**Twierdzenie 1.3** (Cantora o zupełności)**.** *Przestrzeń metryczna $(X, d)$ jest zupełna wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ciągu $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ niepustych zbiorów domkniętych w przestrzeni $X$ takich, że:*

*(i)* $F_1 \supseteq F_2 \supseteq ... \supseteq F_n \supseteq ...,$

*(ii)* $diam(F_n) \to 0$*, gdy* $n \to \infty$

*spełniony jest warunek* $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$

*Dowód.* Załóżmy, że $(X, d)$ jest przestrzenią zupełną. Rozważmy ciąg $(F_n)$ zbiorów spełniających założenia twierdzenia. Z warunku $(ii)$ wynika, że dla każdej liczby dodatniej $\varepsilon$ istnieje liczba naturalna $N$ taka, że dla każdej liczby
$n \geq N$ $diam(F_n) < \varepsilon$. Istnieją zatem elementy $x_m, x_k \in F_n$ takie, że $d(x_m, x_k) < \varepsilon$ dla odpowiednio dużych liczb naturalnych $m$ i $k$. Wobec tego ciąg $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ spełnia warunek Cauchy'ego, a na mocy zupełności przestrzeni $X$, istnieje $x \in X$ taki, że $x = \lim\limits_{m \to \infty} x_m$.
Wiemy zatem, że dla każdego $n \geq N$ ciąg elementów z $F_n$ jest zbieżny do $x$. Ustalmy zatem takie $n$. Ponieważ zbiór $F_n$ jest domknięty, więc $x \in F_n$. Ponadto, dla każdego $k \leq n$ $F_n \subseteq F_k$, a więc $x \in \bigcap\limits_{k=1}^{n} F_k$. Z dowolności $n$ wynika zatem, że $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, co kończy dowód pierwszej implikacji.
W celu udowodnienia implikacji przeciwnej rozważmy ciąg Cauchy'ego $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oraz zbiory $F_n$ postaci

$$F_n = \overline{\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, ...\}}.$$

Widać, że $F_n$ jest malejącym (w sensie inkluzji) ciągiem zbiorów domkniętych. Ponadto, skoro $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ spełnia warunek Cauchy'ego, to
$\lim\limits_{n \to \infty} diam(F_n) = 0$. Na mocy założenia, istnieje zatem $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. Pokażemy, że $x$ jest granicą ciągu $(x_n)$.
Wiemy, że istnieje liczba $N$ taka, że dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ $diam(F_n) < \varepsilon$, gdy $n \geq N$. Ponieważ $x \in F_n$, to $d(x_n, x) \leq diam(F_n) < \varepsilon$, co pokazuje, że $x_n \to x$, gdy $n \to \infty$. To kończy dowód tej implikacji i całego twierdzenia. $\square$

### 1.2 Twierdzenie Baire'a

Przedstawimy teraz twierdzenie tytułowe oraz jego dowód dla przestrzeni metrycznych.

**Twierdzenie 1.4** (Baire)**.** *Niech $(X, d)$ będzie zupełną przestrzenią metryczną, a $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - ciągiem zbiorów nigdziegęstych w przestrzeni $X$. Wówczas zbiór*

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$$

*jest zbiorem brzegowym.*

*Dowód.* Bez straty większej ogólności załóżmy, że zbiory $F_n$ są domknięte. Aby pokazać, że $A$ jest zbiorem brzegowym wystarczy pokazać, że $X \setminus A$ jest zbiorem gęstym w $X$. Niech zatem $V$ będzie dowolnym zbiorem otwartym w $X$. Ponieważ $Int(F_1) = \emptyset$, zatem istnieje kula otwarta $B_1$ taka, że $\overline{B_1} \subseteq V$, $\overline{B_1} \subseteq X \setminus F_1$ oraz $diam(\overline{B_1}) < 1$. Ponadto, skoro $Int(F_2) = \emptyset$, to istnieje kula $B_2$ zawarta wraz z domknięciem w $B_1$ taka, że $\overline{B}_2 \subseteq X \setminus F_2$ oraz $diam(\overline{B_2}) < \frac{1}{2}$. Tworzymy zatem indukcyjnie rodzinę zbiorów $(\overline{B_n})_{n\in\mathbb{N}}$ takich, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$:

(i) $\overline{B_k} \subseteq X \setminus F_k$,

(ii) $\overline{B_k} \subseteq B_{k-1}$,

(iii) $diam(\overline{B_k}) < \frac{1}{k}$.

Na mocy warunków *(ii)* i *(iii)* oraz twierdzenia 1.3 wnosimy, że $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B_n} \neq \emptyset$. Ponadto dla każdej liczby naturalnej $n$ $\overline{B_n} \subseteq V$, a zatem zachodzą następujące zależności:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B_n} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus F_n) = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = X \setminus A.$$

Stąd otrzymujemy ostatecznie:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B_n} \subseteq V \cap (X \setminus A),$$

czyli $X \setminus A$ ma niepusty przekrój z dowolnym zbiorem otwartym $V$, a więc jest gęsty w $X$. To kończy dowód twierdzenia. □

Zbiór, który zapisuje się jako przeliczalna suma zbiorów nigdziegęstych nosi nazwę zbioru *pierwszej kategorii* lub *mizernego*. Zbiory, które nie są pierwszej kategorii nazywamy zbiorami *drugiej kategorii*, a dopełnienia zbiorów pierwszej kategorii nazywamy *komizernymi* lub *residualnymi*. Ponadto z twierdzenia Baire'a wynika, że w zupełnej przestrzeni metrycznej zbiory pierwszej kategorii są zbiorami brzegowymi.

**Uwaga 1.5.** Z powyższego twierdzenia oraz z własności zbioru brzegowego wynika, że jeśli $(X, d)$ jest zupełną przestrzenią metryczną oraz $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, gdzie $A_n \subseteq X$, to istnieje takie $k \in \{1, ..., n, ...\}$, że $Int(A_k) \neq \emptyset$.

**Uwaga 1.6.** Wykorzystując prawa de Morgana, twierdzenie Baire'a można sformułować następująco:
*Jeżeli* $\{V_n\}$ *jest rodziną otwartych zbiorów gęstych w zupełnej przestrzeni metrycznej* $(X, d)$, *to zbiór*

$$V = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$$

*jest gęsty w* $X$.

**Uwaga 1.7.** Twierdzenie Baire'a zachodzi także w przestrzeni metryzowalnej w sposób zupełny. Wystarczy bowiem przeprowadzić powyższy dowód posługując się metryką równoważną zupełną i zauważyć, że jeżeli metryki $d$ i $d'$ na zbiorze $X$ są równoważne, to rodzina zbiorów nigdziegęstych w przestrzeniach $(X, d)$ i $(X, d')$ jest taka sama (podobna uwaga tyczy się rodziny zbiorów brzegowych).

## 1.3 Zastosowania

Twierdzenie Baire'a ma zastosowania w różnych dziedzinach matematyki. Na przykład w analizie funkcjonalnej wykorzystuje się je do udowodnienia dwóch bardzo ważnych twierdzeń: twierdzenia Banacha-Steinhausa oraz twierdzenia o przekształceniu otwartym. Ponadto pozwala ono pokazać, że nieskończenie wymiarowa przestrzeń Banacha nie posiada przeliczalnej bazy (tzn. maksymalnego układu liniowo niezależnego). W topologii natomiast twierdzenie Baire'a można wykorzystać do udowodnienia, że przestrzeń liczb wymiernych nie jest metryzowalna w sposób zupełny, a w teorii miary pomaga udowodnić twierdzenie Vitalego-Hahna-Saksa.
Poniżej przedstawimy dwa z innych, przykładowych zastosowań naszego tytułowego twierdzenia.

**Przykład 1.8.** Niech $X$ będzie przestrzenią ciągłych funkcji rzeczywistych określonych na odcinku $[0, 1]$ (oznaczane jako $C([0, 1])$) z metryką *supremum* daną wzorem:

$$d_{sup}(f, g) = sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [0, 1]\}.$$

Jak wiadomo, przestrzeń ta jest zupełna. Pokażemy, że istnieją w niej funkcje, które nie są monotoniczne na dowolnym przedziale zawartym w $[0, 1]$.
Niech $I_n$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, będą przedziałami domkniętymi, których końcami są liczby wymierne z przedziału $[0, 1]$.
Niech $A_n$ będzie zbiorem tych funkcji z przestrzeni $X$, które są niemalejące na przedziale $I_n$, a $D_n$ - zbiorem funkcji z $X$ nierosnących na $I_n$,
gdzie $n = 1, 2, 3, ....$ Wówczas zbiór

$$E_n = A_n \cup D_n$$

jest zbiorem funkcji monotonicznych na $I_n$. Zbiory $A_n$ i $D_n$ są domknięte. Istotnie, rozważmy ciąg funkcji $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ze zbioru $A_n$ zbieżny do pewnej funkcji $f$ (pokazanie domkniętości $D_n$ przebiega w sposób analogiczny i pozostawiamy to jako ćwiczenie). Ustalmy punkty $x, y$ ze zbioru $I_n$ i przyjmijmy, że $x \leq y$. Wtedy dla każdej liczby naturalnej $k$ zachodzi $f_k(x) \leq f_k(y)$. Przechodząc z $k$ do nieskończoności dostajemy, że $f(x) \leq f(y)$, co pokazuje, że $f \in A_n$. Wynika stąd, że dla każdego $n$ zbiór $E_n$ jest domknięty. Ponadto zbiór $E_n$ ma puste wnętrze. Aby to pokazać, ustalmy $f \in E_n$. Załóżmy, ze $f$ jest funkcją niemalejącą (w przypadku funkcji nierosnącej dowód jest analogiczny i ponownie pozostawiamy go jako ćwiczenie). Załóżmy ponadto, że $p_n$ i $q_n$ są końcami przedziału $I_n$, przy czym $p_n < q_n$. Ustalmy $\varepsilon > 0$ oraz punkty $x_1, x_2$ z $(p_n, q_n)$ takie, że

$$x_1 \leq x_2 \text{ i } f(q_n) - \varepsilon \leq f(x_2) \leq f(q_n).$$

Punkty takie istnieją, ponieważ funkcja f jest ciągła. Niech $g$ będzie taką funkcją z $X$, że $|g(x)| \leq \varepsilon$ dla każdego $x \in [0,1]$, $g(p_n) = g(q_n) = -\varepsilon$ i $g(x_1) = g(x_2) = 0$. Wówczas funkcja $h = f - g$ spełnia następujące warunki

(i) $d_{sup}(f, h) \leq \varepsilon$

(ii) $h(p_n) = f(p_n) - \varepsilon < f(p_n) < f(x_1) = h(x_1)$

(iii) $h(x_2) = f(x_2) > f(q_n) - \varepsilon = h(q_n)$

Z warunku $(i)$ wynika, że funkcja $h$ znajduje się w dowolnie małym otoczeniu funkcji $f$, a z warunków $(ii)$ i $(iii)$ - że funkcja $h$ nie jest rosnąca na $I_n$. A stąd wynika, że $Int(E_n) = \emptyset$ dla każdej liczby $n$. Z twierdzenia Baire'a oraz uwagi 1.5 wnosimy, że

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \neq X.$$

Z tego wynika, że istnieją funkcje ciągłe na przedziale $[0,1]$, które nie są monotoniczne na żadnym przedziale $I_n$. Zbiór $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ jest gęsty w $[0,1]$, zatem na dowolnym przedziale zawartym w $[0,1]$ można znaleźć funkcję niemonotoniczną, co należało pokazać.

□

**Przykład 1.9.** Rozważmy przestrzeń $X = \mathbb{R}$ z naturalną metryką euklidesową $d$, tzn.

$$d(x, y) = |x - y|,$$

dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$. Przestrzeń ta jest zupełna. Za pomocą twierdzenia Baire'a można w łatwy sposób udowodnić, że zbiór liczb rzeczywistych jest nieprzeliczalny.
Załóżmy bowiem nie wprost, że $\mathbb{R}$ jest zbiorem przeliczalnym, to znaczy

$$\mathbb{R} = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}.$$

Wówczas

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_n\}. \tag{1}$$

W dowolnej przestrzeni metrycznej zbiory jednoelementowe są domknięte. Ponadto w $(\mathbb{R}, d)$ zbiory te mają puste wnętrza. Na mocy tych spostrzeżeń, tożsamości (1) oraz twierdzenia Baire'a uzyskujemy sprzeczność z zupełnością rozważanej przestrzeni, która dowodzi, że zbiór liczb rzeczywistych jest nieprzeliczalny.

□

Na koniec tej części poczyńmy mniej formalną, ale cenną pod względem dydaktycznym uwagę na temat twierdzenia Baire'a, która pozwoli na nabranie intuicji. Zbiór nigdziegęsty z topologicznego punktu widzenia jest zbiorem *małym*, natomiast otwarty zbiór gęsty nie jest zbiorem *małym*. Z kolei zbiór pierwszej kategorii nie jest *duży*, a zbiór komizerny, jako dopełnienie, jest zbiorem *dużym*. Takie intuicje pozwalają nam na sformułowanie twierdzenie Baire'a następująco

*przeliczalna suma zbiorów małych nie jest zbiorem dużym*

lub, na mocy uwagi 1.6,

*przeliczalny przekrój zbiorów dużych jest zbiorem dużym*,

Wobec tego, jeśli z wykorzystaniem twierdzenia Baire'a uzyskujemy wniosek postaci

*W zupełnej przestrzeni metrycznej $X$ istnieje element $x$ mający własność $\alpha(x)$*,

to tak naprawdę wniosek ten powinien być sformułowany następująco:

*element z własnością $\alpha(x)$ jest typowym elementem zupełnej przestrzeni metrycznej $X$.*

*Typowość* polega na tym, że zbiór elementów o własności $\alpha(x)$ jest zbiorem komizernym. Wróćmy do przykładu 1.8. Pokazuje on istnienie pewnej funkcji ciągłej na odcinku $[0, 1]$, która nie jest monotoniczna na żadnym podprzedziale $I$. W związku z tym, co zostało napisane powyżej stwierdzamy, że takie właśnie funkcje są typowymi obiektami przestrzeni zupełnej $C([0, 1])$. Przykład ten pokazuje, jak bardzo mylna może być intuicja, bowiem bardzo ciężko wyobrazić sobie funkcję ciągłą, która na żadnym odcinku, dowolnie małej długości, jest niemonotoniczna.