Analiza i Topologia R **Poprawa** luty 2020

Zad. 1 Ustalamy (X, Σ, μ) takie, że $\mu(X) = 1$. Powiemy, że jakaś własność (*) zachodzi *niemal* wszędzie, jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $A \in \Sigma$ taki, że $\mu(A) < \varepsilon$ i własność (*) zachodzi wszędzie poza zbiorem A.

- Pokaż, że jeżeli własność (*) zachodzi prawie wszędzie, to zachodzi niemal wszędzie.
- Pokaż, że jeżeli ciąg (f_n) jest zbieżny niemal wszędzie, to jest zbieżny prawie wszędzie.
- Sformułuj twierdzenie Jegorowa.

Zad. 2 Ustalamy (X, Σ, μ) takie, że $\mu(X) = 1$. Mamy daną funkcję f taką, że $f > 1$ prawie wszędzie. Niech

$$\nu(A) = \int_A f d\mu.$$

Czy $\nu \ll \mu$? Czy $\mu \ll \nu$? Czy możliwe, że $\mu = \nu$? Odpowiedzi uzasadnij.

Zad. 3 Niech (X, Σ, μ) będzie przestrzenią miarową. Pokaż, że μ jest ciągła z dołu. Czy μ jest zawsze ciągła z góry? Odpowiedź uzasadnij.

Zad. 4 (dla ambitnych) Udowodnij twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej.