Analiza i Topologia R Lista 10 7 I 2020

Zad. 1 Załóżmy, że (f_n) jest ciągiem funkcji borelowskich takich, że istnieje $r \in \mathbb{R}$ taki, że $f_n(x) < r$ dla każdego n i dla każdego x. Pokaż, że wtedy f zdefiniowane jako

$$f(x) = \lim_n f_n(x)$$

jest funkcją borelowską.

Zad. 2 Pokaż, że jeżeli $f = g$ μ-prawie wszędzie, to

$$\int f \, d\mu = \int g \, d\mu.$$

Pokaż, że nie zachodzi odwrotna implikacja.

Zad. 3 Oblicz całkę $\int_{[0,1]} g \, d\lambda$, gdzie

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \text{ dla } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}, \\ \sin(x^2) \text{ dla } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Zad. 4 Sprawdź, że funkcja μ określona na $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ dana wzorem

$$\mu(A) = \frac{1}{3}\delta_1(A) + \frac{2}{3}\delta_2(A)$$

dla każdego $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, jest miarą. Oblicz całkę

$$\int_{\mathbb{R}} \sin x \, d\mu.$$

Podaj przykład takiej funkcji $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że

$$\int_{[0,1]} f \, d\mu = 15.$$

Zad. 5 Udowodnij tzw. nierówność Czebyszewa, tzn.

$$\int_X f \, d\mu \geq \epsilon \cdot \mu(\{x \in X \colon f(x) \geq \varepsilon\}).$$

Tutaj (X, Σ, μ) jest przestrzenią miarową, f jest funkcją mierzalną *nieujemną*, a $\varepsilon > 0$. (Mierzalność oznacza tutaj, że $f^{-1}[B] \in \Sigma$ dla każdego borelowskiego B; w rozwiązaniu można się obyć bez tej informacji, chodzi po prostu o to, żeby $\int f \, d\mu$ istniało).

Zad. 6 Rozważmy $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, gdzie μ jest miarą liczącą. Niech $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ będzie ciągiem. Pokaż, że

$$\int f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$