Analiza i Topologia R   Lista 9   16 XII 2019

Zad. 1 Pokaż, że dla każdego borelowskiego $B \subseteq \mathbb{R}$ i dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór borelowski ograniczony $A \subseteq \mathbb{R}$ taki, że $A \subseteq B$ i $\lambda(B \setminus A) < \varepsilon$.

Zad. 2 Pokaż, że dla każdego borelowskiego $B \subseteq \mathbb{R}$ i dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór zwarty $K \subseteq \mathbb{R}$ taki, że $K \subseteq B$ i $\lambda(B \setminus A) < \varepsilon$.

Zad. 3 Znajdź miarę zbioru $A \subseteq [0,1]$ złożonego z tych liczb, które w rozwinięciu dziesiętnym nie zawierają cyfry 7.

Zad. 4 Znajdź przykład zbioru $A \subseteq \mathbb{R}$ takiego, że naraz spełnione są warunki

- $\lambda(\mathrm{Int}(A)) = 2$,
- $\lambda(A) = 5$,
- $\lambda(\overline{A}) = 10$.

Zad. 5 Pokaż, że poniższe warunki są równoważne temu, że funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest borelowska:

- $f^{-1}[U]$ jest borelowski dla każdego otwartego $U \subseteq \mathbb{R}$.
- $f^{-1}[F]$ jest borelowski dla każdego domkniętego $F \subseteq \mathbb{R}$.
- $f^{-1}[(a,b)]$ jest borelowski dla każdego $a < b$.
- $f^{-1}[(q,\infty)]$ jest borelowski dla każdego $q \in \mathbb{Q}$.

Wymień jeszcze parę innych warunków równoważnych borelowskości funkcji.

Zad. 6 Pokaż, że następujące funkcje są borelowskie. (Uwaga: żeby sprawdzić, że dany przeciwobraz jest borelowski, niekoniecznie trzeba go znaleźć).

$$f(x) = \mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1, \text{ gdy } x > 0, \\ 0, \text{ gdy } x = 0, \\ -1, \text{ gdy } x < 0. \end{cases}$$

$$g(x) = \mathrm{sgn}(\sin(x))$$

$$h(x) = \begin{cases} 0, \text{ gdy } x \le 0, \\ \sin(\frac{1}{x}), \text{ gdy } x > 0. \end{cases}$$

$$i(x) = \begin{cases} x^2 - e^x \text{ gdy } x \in \mathbb{Q}, \\ \log(|x|+1)^4 \text{ gdy } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Zad. 7 Udowodnij, że nie istnieje σ-algebra, która jest nieskończona i przeliczalna.