

Zad. 1 Zbiór $G \subseteq \mathbb{R}$ nazywamy zbiorem typu G_δ , jeżeli jest przekrojem przeliczalnie wielu zbiorów otwartych. Podobnie F jest zbiorem typu F_σ , jeśli jest przeliczalną sumą zbiorów domkniętych. Podaj przykład zbioru, który jest typu F_σ , ale nie jest typu G_δ . Spróbuj znaleźć przykład zbioru, który nie jest ani typu F_σ ani typu G_δ .

Zad. 2 Niech (A_n) będzie ciągiem podzbiorów \mathbb{R} . Powiemy, że A jest granicą dolną (A_n) , jeżeli

$$A = \bigcup_n \bigcap_{m>n} A_m.$$

Zbiór A jest natomiast granicą górną (A_n) , jeżeli

$$A = \bigcap_n \bigcup_{m>n} A_m.$$

Pokaż, że A jest granicą dolną (A_n) wtedy i tylko wtedy, gdy A składa się ze wszystkich punktów, które należą do prawie wszystkich A_n (poza skończoną liczbą). Sformułuj podobną charakteryzację granicy górnej. Podaj przykład ciągu, dla którego granica dolna i górna są różne.

Zad. 3 Pokaż, że przekrój dowolnie wielu σ -algebr na zbiorze X też jest σ -algebrą na X . Wywnioskuj, że dla każdej rodziny $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ istnieje najmniejsza σ -algebra zawierająca \mathcal{A} (będziemy ją nazywać σ -algebrą generowaną przez \mathcal{A}).

Zad. 4 Wyznacz σ -algebry na \mathbb{R} generowane przez następujące rodziny zbiorów:

- $\{\{1\}, \{2, \pi\}\}$,
- $\{\{x\} : x \in \mathbb{R}\}$,
- $\{A : |A| < \aleph_0\}$,
- $\{A : |A| \leq \aleph_0\}$,
- $\{A : |A| \geq \aleph_0\}$.

Zad. 5 Udowodnij, że jeżeli Σ jest skończoną σ -algebrą podzbiorów X , to $|\Sigma| = 2^n$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$.

Zad. 6 Upewnij się, że miary zdefiniowane na wykładzie (np. delta Diraca, miara licząca; **nie** rozważaj tu natomiast miary Lebesgue'a) rzeczywiście są miarami.

Zad. 7 Pokaż, że funkcja $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \{0, 1\}$ dana wzorem

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } A \text{ jest przeliczalny} \\ 1, & \text{gdy } A \text{ jest nieprzeliczalny.} \end{cases}$$

nie jest miarą.

Zad. 8 Niech (X, Σ, μ) będzie przestrzenią miarową. Pokaż, że zachodzą następujące fakty, jeśli trzeba to wcześniej uzupełnij wzory (będziemy tu zakładać, że $A, B, C \in \Sigma$),

- jeśli $A \subseteq B$, to $\mu(A) \leq \mu(B)$,
- $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$,
- $\mu(A \cup B \cup C) = \mu(A) + \mu(B) + \mu(C) - \dots$,

Zad. 9 Pokaż, że poniższe rodziny generują σ -algebrę zbiorów borelowskich:

- a) rodzina podzbiorów otwartych \mathbb{R} ,
- b) rodzina przedziałów domkniętych,
- c) rodzina otwartych przedziałów o końcach wymiernych,
- d) rodzina zbiorów postaci (a, ∞) dla $a \in \mathbb{R}$,
- e) rodzina zbiorów postaci $[-\infty, q]$ dla $q \in \mathbb{R}$.

Wskazówka: najpierw zauważ, że każdy z powyższych zbiorów jest borelowski, a więc σ -ciała generowane przez te rodziny nie są większe od rodziny zbiorów borelowskich. Następnie pokaż, że za pomocą elementów każdej z powyższych rodzin da się zapisać (używając \cup, \cap, \setminus i dopełnień) dowolny przedział otwarty.

Zad. 10 Oblicz z definicji $\lambda([0, 1] \cup [2, 5))$.