

**Zad. 1**    Pokaż, że na  $C[0, 1]$  nie da się określić iloczynu skalarnego zgodnego z normą supremum tzn. takiego  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , że  $\|f\|_{\text{sup}} = \sqrt{\langle f, f \rangle}$  dla każdego  $f \in C[0, 1]$ . (Wskazówka: użyj równości równoległoboku). Wywnioskuj, że przestrzeń  $C[0, 1]$  z metryką supremum nie jest przestrzenią unitarną.

**Zad. 2**    Pokaż, że dla wektorów  $x, y$  w przestrzeni unitarnej  $X$  następujące warunki są równoważne:

- a)  $x \perp y$ ,
- b)  $\|x + \lambda y\| = \|x - \lambda y\|$  dla każdego  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,
- c)  $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$  dla każdego  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Zad. 3**    Pokaż, że jeżeli  $(X, \|\cdot\|)$  jest przestrzenią Hilberta,  $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$  jest układem ortonormalnym, to  $\sum_{k \in \mathbb{N}} \langle x, x_k \rangle x_k$  jest zbieżny dla każdego  $x \in X$ .

**Zad. 4**    Oblicz  $\langle f, g \rangle$  w  $C[0, 1]$  z normą  $\|\cdot\|_2$ , gdzie

- a)  $f(x) = x, g(x) = x^2$ ,
- b)  $f(x) = e^x, g(x) = x$ .

**Zad. 5**    Oblicz kąt między ciągami  $(\frac{1}{2^n})$  i  $(\frac{1}{3^n})$  w  $\ell_2$ . (Wskazówka: w jaki sposób kąt jest związany z iloczynem skalarnym w przestrzeniach euklidesowych?)

**Zad. 6**    Odwołując się do przestrzeni euklidesowych, zdefiniuj, co to jest rzut wektora  $x$  na prostą  $\{a \cdot y : a \in \mathbb{R}\}$  rozpinaną przez wektor  $y$  w przestrzeni unitarnej. Znajdź rzut funkcji  $f(x) = x^2$  na prostą rozpinaną przez  $g(x) = \sin x$  w przestrzeni  $C[-\pi, \pi]$ .

**Zad. 7**    Zapisz szeregi Fouriera funkcji na  $[-\pi, \pi]$

- a)  $f(x) = |x|$ ,
- b)  $f(x) = x^2$ .