Analiza i Topologia R **Lista 5** 25 XI 2019

Zad. 1 Twierdzenie aproksymacyjne Weierstrassa mówi, że zbiór wielomianów jest gęsty w $C[0,1]$.

- Pokaż, że dla każdej funkcji (ciągłej) $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ i każdego skończonego zbioru $F \subseteq [0,1]$ istnieje wielomian W taki, że $W(x) = f(x)$ dla każdego $x \in X$. (Wskazówka: najpierw pokaż, że dla każdego punktu $x \in F$ istnieje wielomian W taki, że $W(x) = f(x)$ i $W(z) = 0$ dla każdego $z \in F$ takiego, że $x \neq z$.)
- Skonstatuj, że powyższy fakt nie dowodzi jeszcze twierdzenia aproksymacyjnego Weierstrassa.
- Pokaż, że $C[0,1]$ jest ośrodkowa.

Zad. 2 Pokaż, że zbiór funkcji kawałkami liniowych jest gęsty w $C[0,1]$.

Zad. 3 Które z poniższych podzbiorów $C[0,1]$ są wypukłe?

- $\{f\colon f(1) < 5\}$,
- $\{f\colon f$ jest różniczkowalna$\}$,
- $\{f\colon f$ nie jest różniczkowalna$\}$.

Zad. 4 Udowodnij, że przestrzeń ℓ_1 jest zupełna. (Wskazówka: rozważ ciąg Cauchy'ego (x_n) w ℓ_1, pomyśl, jaką własność ma ciąg $x_n(k)$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$ i używając zupełności $\mathbb{R}$ wskaż kandydata na granicę. Później *wystarczy* udowodnić zbieżność i to, że kandydat jest z ℓ_1.)

Zad. 5 Pokaż, że ℓ_1 jest ośrodkowa, a ℓ_∞ nie jest.

Zad. 6 Powiemy, że $x \in A$ jest wierzchołkiem (punktem ekstremalnym) zbioru wypukłego A, jeżeli dla każdego $y, z \in A$, jeżeli $x = \lambda y + (1-\lambda)z$, to $\lambda = 0$ lub $\lambda = 1$.

- Znajdź wierzchołki kwadratu $[0,1] \times [0,1]$ w $\mathbb{R}$.
- Znajdź choć jeden wierzchołek zbioru $\{x \in \ell_\infty\colon ||x||_\infty \leq 1\}$ w ℓ_∞.
- Pokaż, że zbiór $\{x \in \ell_\infty\colon ||x||_\infty \leq 1$ i x jest zbieżny do $0\}$ nie ma wierzchołków.