## **Analiza i Topologia R** **Lista 3** 28 X 2019

**Zad. 1** Jak wyglądają kule i zbiory otwarte w przestrzeni $[0,1) \cup [2,3]$ z metryką euklidesową? Jak wyglądają kule i zbiory otwarte w $\mathbb{N}$ z metryką euklidesową?

**Zad. 2** Pokaż, że jeżeli ciąg Cauchy'ego ma podciąg zbieżny, to sam jest zbieżny (i to do tej samej granicy).

**Zad. 3** Zbadaj, które z przestrzeni $(\mathbb{R}^2, d)$ (gdzie $d$ jest metryką $d_1$, maksimum, dyskretną, centrum) są zwarte, zupełne, ośrodkowe, spójne.

**Zad. 4** Rozważ przedział $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ z metryką daną wzorem

$$d(x,y) = |\mathrm{tg}(x) - \mathrm{tg}(y)|.$$

Czy ta przestrzeń jest zwarta? Zupełna? Ośrodkowa? Spójna?

**Zad. 5** Na zbiorze $[0,1]^{\mathbb{N}}$ (tutaj zakładamy, że $0 \notin \mathbb{N}$) określamy metrykę wzorem

$$d((x_n),(y_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}|x_n - y_n|.$$

Rozważmy kulę $B_{\frac{1}{2}}((a_n))$, gdzie $(a_n)$ jest ciągiem stale równym 0. Podaj przykład elementu $(x_n)$ tej kuli, który nie jest jej środkiem. Następnie znajdź dla tego elementu liczbę $N$ taką, żeby prawdziwe było zdanie:

Jeśli $(y_n)$ jest taki, że $\forall n < N \; y(n) = x(n)$, to $(y_n) \in B_{\frac{1}{2}}((a_n))$.

**Zad. 6** Rozważmy $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ jako podprzestrzeń $[0,1]^{\mathbb{N}}$ z poprzedniego zadania. Pokaż, że kule w tej przestrzeni wyglądają tak, jak kule w przestrzeni $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ze *standardową* metryką.

**Zad. 7** (zadanie Mateusza) Znajdź metrykę $d$ na $\mathbb{R}^2$ taką, że $(X,d)$ jest przestrzenią ośrodkową, ale $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ nie jest w niej gęsty.