Analiza i Topologia R Lista 2 14 X 2019

Zad. 1 Naszkicuj w układzie współrzędnych zbiór

$$A = \{\langle x, y\rangle \colon 1 < x < 2 \wedge 0 \leq y \leq 3\} \cup ([2,3] \times \{0\}) \cup ([2,3] \times \{3\}).$$

Zbadaj wnętrze, domknięcie i brzeg zbioru A w metryce euklidesowej, d_1, metryce centrum i dyskretnej.

Zad. 2 Pokaż, że $\mathrm{Int}(A)$ jest największym zbiorem otwartym zawartym w A, a $\overline{A}$ jest najmniejszym zbiorem domkniętym zawierającym A.

Zad. 3 Czy zawsze

- $\mathrm{Int}(\overline{A}) = \mathrm{Int}(A)$?
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$?
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$?
- $\mathrm{Int}(A) = (\overline{A^c})^c$?

Zad. 4 Zbadaj wnętrza, domknięcia i brzegi zbioru A w przestrzeni $C[0,1]$ (z metryką supremum), jeśli

- A to zbiór funkcji stałych,
- $A = \{f \colon f(x) < 2\}$,
- A to zbiór funkcji ściśle rosnących,
- A to zbiór funkcji o pochodnej nieprzekraczającej 2.

Zad. 5 Niech A będzie zwartym podzbiorem $\mathbb{R}$. Pokaż, że A ma wtedy najmniejszy i największy element.

Zad. 6 Niech A będzie zwartym podzbiorem $\mathbb{R}$ i niech $f \colon A \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Pokaż, że f jest ograniczona i przyjmuje swoje kresy.

Zad. 7 Pokaż, że jeżeli X jest zwarta i $F \subseteq X$ jest domknięty, to F jest zwarty.

Zad. 8 Załóżmy, że X jest przestrzenią zwartą. Pokaż, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje skończony zbiór $F \subseteq X$ taki, że

$$\text{dla każdego } x \in X \text{ istnieje } f \in F \text{ taki, że } d(x, f) < \varepsilon.$$

(Wskazówka: załóż, że tak nie jest i skonstruuj przy tym założeniu ciąg bez podciągu zbieżnego.) Wywnioskuj, że każda przestrzeń zwarta jest ośrodkowa.

Zad. 9 Czy przestrzeń $C[0,1]$ z metryką supremum jest zwarta?