Analiza i Topologia R   Lista ostatnia   20 I 2020

Zad. 1 Oblicz miarę $\lambda_2(A)$, gdzie

a) $A = [0,1] \times \{0,1\}$,

b) $A = \{\langle x, y\rangle : x - y \in \mathbb{Q}\}$.

Zad. 2 Rozważmy przestrzeń miarową $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{P}(\mathbb{R}), \lambda \otimes \mu)$, gdzie μ jest miarą liczącą. Oblicz miarę $\lambda \otimes \mu(A)$, gdzie

a) $A = [0,1] \times \{0,1\}$,

b) $A = \{\langle n, m\rangle \in \mathbb{N}^2 : n \leq m\}$.

Zad. 3 Załóżmy, że dla zbiorów borelowskich A, $B \subseteq [0,1]^2$ zachodzi:

$$\forall x\ \lambda(A_x) = \lambda(B_x).$$

Wykaż, że w takim razie $\lambda_2(A) = \lambda_2(B)$. Pokaż, że ta równość byłaby spełniona również, gdy $\lambda(A_x) = \lambda(B_x)$ prawie wszędzie.

Zad. 4 Niech $E \in \mathrm{Bor}([0,1]^2)$. Rozważmy funkcję $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadaną wzorem $f_E(x) = \lambda(E_x)$.

a) Pokaż, że jeśli $E = A \times B$, to f_E jest borelowska,

b) Pokaż, że jeśli f_E jest borelowska i $F = [0,1]^2 \setminus E$, to f_F jest borelowska. (Wskazówka: jak zapisać f_F używając f_E?)

c) Pokaż, że jeśli f_{E_n} są borelowskie i $E = \bigcup E_n$, to f_E jest borelowska. (Wskazówka: jak zapisać f_E przy pomocy f_{E_n}?)

d) Wywnioskuj z powyższych, że f_E jest borelowska dla każdego borelowskiego $E \subseteq [0,1]^2$.

Zad. 5 Stosując tw. Fubiniego wyprowadź wzór na objętość stożka o wysokości h, którego podstawą jest zbiór borelowski $B \subseteq \mathbb{R}^2$.

Zad. 6 Rozważmy przestrzeń $(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \Sigma, \mu)$, gdzie Σ i μ to σ-algebra i miara produktowa podane na wykładzie. Oblicz $\mu(A)$, jeśli

- A jest zbiorem tych ciągów $x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, w których jedynka pojawiła się nieskończenie wiele razy,
- A jest zbiorem tych ciągów $x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, w których sekwencja $(1,0,1,1)$ pojawia się przynajmniej raz,
- A jest zbiorem tych ciągów $x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, w których sekwencja $(1,0,1,1)$ pojawia się dokładnie raz.

Zad. 7 Niech ν będzie miarą określoną na rodzinie zbiorów borelowskich zdefiniowaną przez

$$\nu(A) = \int_A x^2 \, d\lambda,$$

gdzie λ jest miarą Lebesgue'a. Oblicz

$$\int_{[0,1]} \sin x \, d\nu.$$

Zad. 8 Dwie osoby losują liczby z przedziału $[0, 1]$. Rozkład prawdopodobieństwa związany z losowaniem pierwszej osoby jest dany przez

$$\mu_1(A) = \int_A 3x^2 \, d\lambda,$$

a drugiej przez

$$\mu_2(A) = \int_A 2 - 2x \, d\lambda.$$

(Tzn., że prawdopodobieństwo wylosowania przez i-tą osobę liczby ze zbioru A wynosi $\mu_i(A)$.) Jakie jest prawdopodobieństwo, że liczba wylosowana przez pierwszą osobę będzie dwa razy mniejsza niż przez drugą?
zad Podaj przykład paru miar μ określonych na zbiorach borelowskich na $\mathbb{R}$ takich, że $\mu(\mathbb{R}) = 1$.

Zad. 9 Załóżmy, że μ i ν są miara określonymi na tej samej σ-algebrze i że $\nu \ll \mu$ oraz $\mu \ll \nu$. Znajdź związek między $\frac{d\mu}{d\nu}$ a $\frac{d\nu}{d\mu}$.

Zad. 10 Rozważmy przestrzeń probabilityczną $(\mathbb{R}, \mathrm{Bor}, \mu)$ (*probabilistyczna* = miarowa + $\mu(\mathbb{R}) = 1$)

- Pokaż, że dystrybuanta F_μ miary μ jest prawostronnie ciągła.
- Pokaż, że dystrybuanta F_μ miary μ nie jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $x \in X$ taki, że $\mu(\{x\}) > 0$.

Zad. 11 Załóżmy, że $\mu \ll \nu$ i $\mu \perp \nu$. Co możemy powiedzieć o μ?