Kolokwium 2 - Analiza i Topologia R 2020

Zad. 1 Podaj definicję przestrzeni Banacha.

Zad. 2 Mamy daną przestrzeń miarową (X, Σ, μ), przy czym zakładamy, że $\mu(X) = 1$. Niech $f\colon X \to \mathbb{R}$ będzie taka, że $f > 0$ prawie wszędzie. Pokaż, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że

$$\mu(\{x\colon f(x) > \delta\}) > 1 - \varepsilon.$$

Podaj przykład funkcji f jak wyżej takiej, że nie istnieje $\delta > 0$ taka, że $f \geq \delta$ prawie wszędzie.

Zad. 3 Jak (mniej więcej) dowodzi się, że przestrzeń $C[0,1]$ jest ośrodkowa?

Zad. 4 Rozważmy przestrzeń $(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \Sigma, \mu)$, gdzie μ jest miarą wprowadzoną na wykładzie. Podaj przykład $A \in \Sigma$ takiego, że $\mu(A)$ ani nie jest 0 ani nie jest postaci $\frac{1}{2^n}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Uzasadnij, że dla każdego $r \in [0,1]$ istnieje $A \in \Sigma$ taki, że $\mu(A) = r$.

Zad. 5 Zdefiniuj ℓ_2 i iloczyn skalarny w tejże przestrzeni.

Zad. 6 Niech (X, Σ, μ), (X, Σ, ν) będą przestrzeniami miarowymi. Załóżmy, że dla każdego $A \in \Sigma$

$$\mu(A) = \int f \; d\nu$$

i

$$\nu(A) = \int g \; d\mu.$$

Zbadaj relację między funkcjami f i g.

Zad. 7 Sformułuj lemat Fatou.

Zad. 8 Rozważmy przestrzenie miarowe (X, Σ, μ) i (X, Σ, ν) i liczby rzeczywiste dodatnie a i b. Udowodnij, że dla mierzalnej funkcji f zachodzi

$$\int f \; d(a\mu + b\nu) = a \int f \; d\mu + b \int f \; d\nu.$$