Kolokwium 1 - Analiza i Topologia R 2019

Zad. 1 (6) Znajdź wnętrze i brzeg zbioru A w przestrzeni X, jeśli

a) $X = \mathbb{R}^2$ (z metryką euklidesową), $A = \mathbb{Q} \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$,

b) $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, A - ciągi, które dokładnie 6 razy przyjmują 1,

c) $X = C[0,1]$ (z metryką supremum), $A = \{f \colon \exists x \in [0,1]\ f(x) = 5\}$.

Zad. 2 (6) Udowodnij, że jeśli (X, d) jest przestrzenią zupełną i (F_n) jest zstępującym ciągiem domkniętych podzbiorów X takich, że $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(F_n) = 0$, to $\bigcap_n F_n$ jest zbiorem jednopunktowym.
(Przypomnienie: średnicą zbioru A nazywamy $\operatorname{diam}(A) = \sup\{d(x, y)\colon x, y \in A\}$. Ciąg (F_n) jest zstępujący, jeżeli $F_{n+1} \subseteq F_n$ dla każdego n.)
(Wskazówka retoryczna: do czego się przyda zupełność?)

Pokaż, że przekrój zstępującego ciągu zbiorów domkniętych w $\mathbb{R}$ może być pusty.

Zad. 3 (6) Wskaż ciągłą surjekcję $f\colon X \to Y$ i ciągłą surjekcję $g\colon Y \to X$ lub uzasadnij, że dana funkcja nie istnieje. Czy X i Y są homeomorficzne?

a) $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $Y = [0,1]$,

b) $X = \mathsf{A}$, $Y = \mathsf{H}$,

c) $X = C[0,1]$ (z metryką supremum), Y - okrąg o promieniu 1 (z metryką euklidesową).

Zad. 4 (6) Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Niech $A \subseteq X$ będzie niepustym **zwartym** podzbiorem X. Zdefiniujmy funkcję $f\colon X \to \mathbb{R}$ wzorem

$$f(x) = \inf\{d(x, a) \colon a \in A\}.$$

Pokaż, że dla każdego x istnieje taki $a \in A$, że $d(x, a) = f(x)$.

Uzasadnij, że funkcja f jest ciągła. (Na $\mathbb{R}$ żyje metryka euklidesowa.)