Egzamin 1 - Analiza i Topologia R

Zad. 1 Rozważamy przestrzeń $C[0,1]$ (z normą supremum) i kulę $B_r(f)$ w tej przestrzeni ($r > 0$, $f \in C[0,1]$)

a) Znajdź $\overline{B_r(f)}$.

b) Udowodnij, że $\overline{B_r(f)}$ jest zbiorem wypukłym.

c) Udowodnij, że $\overline{B_r(f)}$ nie jest zwarta.

Zad. 2

a) Sformułuj twierdzenie Radona-Nikodyma.

b) Sformułuj twierdzenie Baire'a.

c) Podaj definicję przestrzeni spójnej nie używając pojęcia otwartości.

d) Oblicz $\int_{[0,\pi]} \sin x \, d\mu$, gdzie $\mu(A) = \int_A x \, d\lambda$.

e) Podaj przykład przestrzeni zupełnej i ograniczonej, która nie jest zwarta. Odpowiedź krótko uzasadnij.

Zad. 3 Podaj przykład (niezerowej) miary μ na $\mathbb{R}$, która jest absolutnie ciągła względem miary Lebesgue'a, ale dla której **nie** zachodzi $\lambda \ll \mu$. Odpowiedź krótko uzasadnij.

Zad. 4 Podaj przykład miary μ na $\mathbb{R}$, której dystrybuanta F_μ spełnia obydwa poniższe warunki:

- F_μ ma dokładnie dwa punkty nieciągłości,
- F_μ nie jest funkcją prostą.

(Za podanie miary, której dystrybuanta spełnia tylko pierwszy warunek, też przyznam (jakieś) punkty. Na wszelki wypadek przypomnę, że $F_\mu(x) = \mu((-\infty, x]))$

Zad. 5 Dla $r, s \in \mathbb{R}$ definiujemy ćwiartkę $C_s^r \subseteq \mathbb{R}^2$ wzorem $C_s^r = \{\langle x, y\rangle \colon r < x \wedge s < y\}$. Czy rodzina wszystkich ćwiartek $\{C_s^r \colon r, s \in \mathbb{R}\}$ generuje σ-ciało zbiorów borelowskich na płaszczyznie? Odpowiedź uzasadnij.

Zad. 6 Zdefiniuj (precyzyjnie) zbiór Cantora i wykaż (krótko), że jest zwarty, nie jest spójny i jest ośrodkowy.